Universidade Federal do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza
Observatório do Valongo
Programa de Pós-Graduação em Astronomia

Dissipação por maré em Saturno e o impacto na expansão orbital de Mimas

Karyna Gimenez de Mattos Coelho

Rio de Janeiro
Abril de 2023

Dissipação por maré em Saturno e o impacto na expansão orbital de Mimas

Karyna Gimenez de Mattos Coelho

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia do Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito necessário para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Astronomia.

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci

Rio de Janeiro
Abril de 2023

CIP - Catalogação na Publicação

G491d

Gimenez de Mattoa Coelho, Karyna
Dissipação por maré em Saturno e o impacto na evolução orbital de Mimas / Karyna Gimenez de Mattoa Coelho. -- Rio de Janeiro, 2023.
103 f.

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Observatório do Valongo, Programa de Pós-Graduação em Astronomia, 2023.

1. Efeitos de maré . 2. Dissipação de energia. 3. Satélites de Saturno. 4. Migração de Mimas. I. Rodríguez Colucci, Adrián , orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

Dissipação por maré em Saturno e o impacto na expansão orbital de Mimas

Karyna Gimenez de Mattos Coelho

Dr. Adrian Rodriguez Colucci ***(orientador)***

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências - Astronomia.

Aprovada por:

Presidente, Dr Adrian Rodriguez Colucci (Orientador) – OV/UFRJ

Drª Silvia Giuliatti Winter – (Avaliadora Externa) – UNESP/participação remota

Dr. Bruno Eduardo Morgado (Avaliador Interno) – OV/UFRJ

Março de 2023

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – (Brasil) CAPES – Código de Financiamento 001.

Dedico esta dissertação ao meu avô Aldir de Mattos e ao meu irmão Daniel Jorge Gimenez de Mattos Coelho. São estrelas que, hoje, fazem parte de uma constelação em outro plano deste Universo.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a minha família. Meus pais, minha avó, meus padrinhos, tios e primos pela compreensão, zelo e carinho. Aos meus fiéis companheiros: Laika e Luke, duas estrelinhas; e Júpiter, meu grande amigo amoroso.

Agradeço aos amigos de longa data por acreditem junto comigo nos meus sonhos e compreenderem minhas ausências. Em especial à Ana Luiza pelos mais de 10 anos de amizade.

Agradeço imensamente à UERJ pela maturidade profissional e pessoal que adquiri durante os anos que estive lá. Agradeço a todos os professores e funcionários que dedicaram seu tempo para ensinar e ajudar. Em especial ao professor Rafael Aranha, que me orientou durante 3 anos e jamais deixou com que o medo e a ansiedade fossem maior do que a minha capacidade. Se não fosse por ele, não teria me apaixonado pelas marés.

Agradeço também aos meus amigos de graduação: Tainá Lanza e Rui Aquino. Amigos que são como irmãos. Fizeram e fazem de tudo pelo meu bem.

Ao Observatório do Valongo por me proporcionar realizar um objetivo que não imaginava ser tão alcançável. A todos os professores, funcionários e técnicos que sempre nos ajudam com carinho e dedicação. Um agradecimento especial ao professor Luan Ghezzi e a Cláudia por torcerem pelas minhas conquistas.

Agradeço à Belén e Marco por terem tornado os momentos de caos mais leves e acreditarem no meu potencial mais do que eu mesma. Sem o apoio deles o caminho teria sido muito menos estrelado.

Ao meu orientador, Adrián, por toda paciência e dedicação em me passar todo o conhecimento necessário para que eu chegasse até aqui. Lá em 2018, quando coloquei como objetivo principal ser orientada por ele, não imaginava que essa oportunidade seria um divisor de águas para minha carreira profissional e pessoal.

Por fim, agradeço a todos que puderam contribuir para que este trabalho fosse realizado. Estudar Astronomia é a realização de um sonho antigo. Espero que a maioria sinta a mesma paixão que sinto ao estudar as marés.

"A natureza e as leis da natureza estavam imersas em trevas; Deus disse "Haja Newton" e tudo se iluminou"

— Alexander Poppe

Resumo

Dissipação por maré em Saturno e o impacto na expansão orbital de Mimas

Karyna Gimenez de Mattos Coelho

Orientador: Adrián Rodríguez Colucci

Resumo da Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Astronomia do Observatório do Valongo, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito necessário para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Astronomia.

Mimas é o satélite mediano mais próximo de Saturno. Atualmente forma um conhecido sistema dinâmico junto com Enceladus, Tethys e Dione. A interação das marés com Saturno desenha a dinâmica orbital de seus satélites promovendo migrações e alterando assim seus semi-eixos e excentricidades. Também é possível que a maré capture os satélites em ressonâncias orbitais. Além da ressonância de 4:2 com Tethys, Mimas evoluiu em ressonância com três outros pequenos satélites na sua vizinhança próxima: Aegaeon, Methone e Anthe. Essa configuração ressonante trouxe algumas questões em relação à migração de Mimas. Neste trabalho, investigamos a migração de Mimas considerando o modelo clássico (ou de *Darwin*) para a maré de Saturno e o modelo de fluência (*creep*) para a maré de Mimas. Descrevemos Saturno como um corpo de duas camadas, sendo seu núcleo sólido viscoelástico rodeado por um envelope gasoso. Ao recorrer à literatura, observamos a carência de estudos que analisam a evolução orbital dos satélites de planetas gigantes, como Saturno, considerando as dissipações em cada camada do planeta. Dessa maneira, analisamos três possíveis casos para a dissipação por maré: quando só há dissipação no núcleo, sendo essa dissipação governada pela viscosidade, a qual consideramos valores distintos que mostram a mudança do regime clássico para o regime *creep*; quando só há dissipação no envelope gasoso, podendo ser governada pelo mecanismo conhecido como *resonance locking*; quando a dissipação está associada ao núcleo e ao envelope simultaneamente. Em vista disso, utilizamos as soluções numéricas das equações médias, para o semi-eixo e excentricidade, afim de analisar a evolução orbital de Mimas majoritariamente em torno de $t = -10^9$ anos em um cenário em que o fator de dissipação Q de Saturno não é constante. Realizamos a análise no espaço de parâmetros, onde investigamos a expansão orbital de Mimas em função do raio do núcleo, fator de relaxação, rigidez do núcleo e viscosidade do núcleo. Concluímos que a viscosidade do núcleo é a variável com maior influência na expansão orbital de Mimas. Verificamos que, do passado para o presente, a expansão orbital de Mimas depende predominantemente da dissipação no núcleo de Saturno. Além disso, a metodologia aplicada para Mimas foi estendida a outros satélites do sistema de Saturno.

palavras-chave: *Efeitos de maré*, *Dissipação de energia*, *Satélites de Saturno*, *Migração de Mimas*

Abstract

Tidal dissipation on Saturn and the impact on the orbital expansion of Mimas

Karyna Gimenez de Mattos Coelho

Advisor: Adrián Rodríguez Colucci

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Astronomia, Observatório do Valongo, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ciências em Astronomia.

Mimas is the closest mid-sized satellite to Saturn. It currently forms a well-known dynamical system along with Enceladus, Tethys and Dione. The tidal interactions with Saturn designs the orbital dynamics of its satellites, causing migrations and thus altering their semi-major axis and eccentricities. It is also possible for the tide to capture the satellites in orbital resonances. In addition to the 4:2 resonance with Tethys, Mimas evolved in resonance with three other small satellites in a close vicinity: Aegaeon, Methone, and Anthe. This resonant configuration brought some questions about Mimas migration. In this work, we investigate Mimas migration considering the classical (or *Darwin*) model for the Saturn tide and the creep model for the Mimas tide. We describe Saturn as a two-layered body, a viscoelastic solid core surrounded by a gaseous envelope. When resorting to the literature, we observed the lack of studies that analyze the orbital evolution of the satellites of giant planets, such as Saturn, considering the dissipations in each layer of the planet. Thus, we analyzed three possible cases for tidal dissipation: when there is only dissipation in the core and this dissipation is governed by viscosity, which we consider different values that show the change from the classical regime to the creep regime; when there is only dissipation in the gaseous envelope, which can be governed by the mechanism known as *resonance locking*; when the dissipation is associated with the core and the envelope simultaneously. In view of this, we use the numerical solutions of the average equations, for the semi-axis and eccentricity, in order to analyze the orbital evolution of Mimas in about $t = -10^9$ years in a scenario where the dissipation factor Q of Saturn is not constant. We performed the analysis in parameter space, where we investigated the orbital expansion of Mimas as a function of core radius, relaxation factor, core rigidity and core viscosity. We conclude that the core viscosity is the variable with the greatest influence on the orbital expansion of Mimas. We verify that, from the past to the present, the orbital expansion of Mimas depends

predominantly on the dissipation in the core of Saturn. Furthermore, the methodology applied to Mimas was extended to other satellites of the Saturn system.

keywords: *Tidal efects*, *Energy Dissipation*, *Saturn's Satellites*, *Mimas migration*

Rio de Janeiro
April 2023

Lista de Figuras

1.1 Ilustração de Saturno e alguns de seus satélites 19
1.2 Imagem feita pela sonda Cassini dos anéis A, B, C e D. 19
1.3 Imagem de Mimas feita durante a MIssão Cassini em 2005. 22
1.4 Ilustração dos vetores da Força de maré (F_m) atuando na Terra devido à Lua. 23

2.1 Ilustração de um sistema de planeta-satélite de massas M e m, respectivamente. 27
2.2 lustração dos vetores de força centrífuga (F_{cf}) e gravitacional (F_g) no planeta Terra sendo perturbado pela Lua. 28
2.3 Ilustração de um planeta de massa M perturbado por um satélite de massa m. 28
2.4 Ilustração de um planeta de massa M perturbado por um satélite de massa m. 30
2.5 Ilustração de um planeta de massa M perturbado por um satélite de massa m. 34
2.6 Ilustração do sistema de coordenadas esféricas com origem no centro de massa do corpo M. 35
2.7 Ilustração das direções dos torques referentes à F_2 e F_3 38
2.8 Componentes do torque nas direções $\hat{\mathbf{k}}$ e $i\hat{\mathbf{k}}$. 38
2.9 Componente transversal v_t no plano orbital de m. 40
2.10 Ilustração dos sistema de coordenadas do modelo de fluência. 44

4.1 Ilustração da estrutura interna dos gigantes gasosos do Sistema Solar. . . 53
4.2 Ilustração do modelo de Maxwell. 54
4.3 Ilustração de um planeta de duas camadas de massa e raio M_p e R_p, respectivamente. 55
4.4 Razão de $\dot{a}_{\text{Mimas}}$ por $\dot{a}_{\text{Saturno}}$ em função viscosidade do núcleo de Saturno. 58
4.5 Razão de $\dot{e}_{\text{Mimas}}$ por $\dot{e}_{\text{Saturno}}$ em função viscosidade do núcleo de Saturno. Os valores apresentados no eixo vertical estão em módulo. Observamos que a maré em Mimas domina a evolução da excentricidade do satélite. . 58
4.6 Ilustração de Saturno sendo perturbado por Mimas. 59
4.7 Variação do semi-eixo de Mimas pelo tempo comparando o valor de $\eta_c = 5 \times 10^{13}$ Pa s utilizado por Shoji & Hussmann (2017) com outros quatro valores. 60
4.8 Taxa de variação pela viscosidade do núcleo de Saturno do **a)** semi-eixo maior de Mimas, **b)** da excentricidade e da **c)** energia dissipada. 61
4.9 Variação do semi-eixo maior de Mimas calculado a partir da equação 4.13. 63

4.10 Taxa de variação temporal do semi-eixo (**a**), da excentricidade (**b**) e da energia (**c**) de Mimas em função de sua viscosidade. 64
4.11 Variação da excentricidade de Mimas utilizando somente a maré no satélite para quatro valores distintos de γ. 65

5.1 O gráfico apresenta $\dot{a}$ em cm/ano pela viscosidade do núcleo de Saturno. . 68
5.2 A Figura apresenta o intervalo de valores de alguns parâmetros específicos para o semi-eixo maior final de Mimas. A barra de cor representa o semi-eixo maior de Mimas para $t = -10^9$ anos. 71
5.3 A Figura apresenta o intervalo de valores de alguns parâmetros específicos para o semi-eixo maior final de Mimas. A barra de cor representa o semi-eixo maior de Mimas para $t = -10^9$ anos. 73
5.4 Variação **a)**do semi-eixo maior e **b)**da excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no núcleo de Saturno quando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s. 74
5.5 Comparação das variações do semi-eixo maior de Mimas para $Q(t)_{10^{14}}$ (variável) e $Q_{10^{14}}$ (constante). 75
5.6 Variações **a)** do semi-eixo maior e **b)** da excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no envelope de Saturno. 75
5.7 Variações do semi-eixo maior e excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no envelope de Saturno para quatro valores de B 77
5.8 Variação do fator Q pelo semi-eixo maior de Mimas devido somente à dissipação no envelope gasoso. 77
5.9 Variação do semi-eixo maior de Mimas utilizando a soma das dissipações em cada camada do planeta (núcleo+envelope) para três valores distintos de viscosidade do núcleo de Saturno. 78
5.10 Variação da excentricidade devido à dissipação simultânea no núcleo e no envelope de Saturno. 79
5.11 Variação do semi-eixo maior de Mimas no tempo para três casos diferentes: contribuição do núcleo e do envelope (curva azul), somente a contribuição do núcleo (curva tracejada preta) e somente a contribuição do envelope (curva tracejada rosa). 80
5.12 Variação do semi-eixo maior de Mimas em $t \approx -4 \times 10^9$ anos para três casos diferentes: contribuição do núcleo e do envelope (curva azul), somente a contribuição do núcleo (curva tracejada preta) e somente a contribuição do envelope (curva tracejada rosa). 80

6.1 Gráfico para $\dot{a}$ dos satélites internos de Saturno em função da viscosidade do núcleo do planeta. 84
6.2 Gráfico para $\dot{e}$ dos satélites internos de Saturno em função da viscosidade do núcleo do planeta. 84
6.3 Gráfico para $\dot{E}$ dos satélites internos de Saturno em função da viscosidade do núcleo do planeta. 85
6.4 Taxa de variação temporal do semi-eixo **a)**, da excentricidade **b)** e da energia **c)** de Enceladus em função de sua viscosidade. 87
6.5 Taxa de variação temporal do semi-eixo **a)**, da excentricidade **b)** e da energia **c)** de Tethys em função de sua viscosidade. 87
6.6 Taxa de variação temporal do semi-eixo **a)**, da excentricidade **b)** e da energia **c)** de Dione em função de sua viscosidade. 88

6.7 Variação do semi-eixo de oito satélites de Saturno em t = -3,9 $\times$ 10^9 considerando somente a dissipação no envelope. 90
6.8 Variação do semi-eixo dos satélites principais de Saturno em t = -3,9$\times$$10^9$ considerando somente a dissipação no núcleo do planeta. 91
6.9 Variação do semi-eixo dos satélites principais de Saturno em t = -3,9$\times$$10^9$ considerando as duas contribuições de dissipação do planeta. 91

7.1 Variação do semi-eixo de Mimas considerando Q_{cte} =2500 (Lainey et al., 2017). 96
7.2 Variação do semi-eixo de Mimas no tempo para três casos diferentes: contribuição do núcleo e do envelope (curva azul), somente a contribuição do núcleo (curva tracejada preta) e somente a contribuição do envelope (curva tracejada rosa). 98

Lista de Tabelas

4.1 Valores médios dos parâmetros referentes a Saturno. 52
4.2 Valores médios das condições inciais das equações. 52
4.3 Valores dos parâmetros referentes ao núcleo e envelope de Saturno. 56
4.4 Valores $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{13} Pa s$\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s. 61
4.5 Valores $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{13} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s em termos de potência. 63

6.1 Valores médios dos parâmetros referentes aos sete satélites de Saturno. . . 83
6.2 Valores de $\dot{a}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s para Enceladus ($\dot{a}_E$), Tethys ($\dot{a}_T$) e Dione ($\dot{a}_D$). 86
6.3 Valores de $\dot{e}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s para Enceladus ($\dot{e}_E$), Tethys ($\dot{e}_T$) e Dione ($\dot{e}_D$). 86
6.4 Valores de $\dot{E}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s para Enceladus ($\dot{E}_E$), Tethys ($\dot{E}_T$) e Dione ($\dot{E}_D$). 86
6.5 Valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ para Enceladus em função de sua viscosidade. 88
6.6 Valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ para Tethys em função de sua viscosidade. 88
6.7 Valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ para Dione em função de sua viscosidade. 88

Sumário

Resumo **8**

Abstract **10**

1 Introdução **18**
1.1 Saturno 18
1.1.1 Missões espaciais em Saturno 19
1.2 Consequência da ação da Força de maré nos satélites de Saturno 21
1.2.1 Satélite Mimas 21
1.2.2 Os efeitos de maré 22
1.2.3 Efeitos de maré nos satélites de Saturno 23

2 Efeitos de Maré **26**
2.1 Modelo clássico (*Darwin*) 26
2.1.1 Maré estática 26
2.1.1.1 Potencial interno e Força 26
2.1.1.2 O Potencial Perturbador 29
2.1.2 Maré dinâmica 32
2.1.2.1 Ângulo de atraso 33
2.1.2.2 Potencial e Força de maré 33
2.1.2.3 Torque de maré e o Momento angular 37
2.1.2.4 Dissipação de energia 39
2.1.2.5 Variações dos elementos orbitais 41
2.2 Modelo de fluência (*creep*) 43
2.2.0.1 Potencial e Força 45
2.2.0.2 Rotação e Torque 46
2.2.0.3 Dissipação de energia 46
2.2.1 Variações do semi-eixo maior e excentricidade 48

3 Objetivos **50**

4 Dissipação por maré no sistema Saturno-Mimas **51**
4.1 Integração das equações 51
4.2 Dissipação em planetas gigantes gasosos 52
4.2.1 Núcleo 54
4.2.2 Envelope de gás 56
4.3 Analisando as equações do sistema Saturno-Mimas. 57
4.4 Dissipação por maré em Saturno 59

4.4.1 Dissipação por maré no núcleo 59
4.4.2 Dissipação por maré no envelope de gás 62
4.5 Dissipação por maré em Mimas 63

5 Resultados **67**
5.1 Evolução orbital de Mimas 67
5.1.1 Evolução orbital de Mimas associada a cada camada de Saturno . 73
5.1.1.1 Núcleo de Saturno 73
5.1.1.2 Envelope de gás de Saturno 75
5.1.2 Dissipação nas duas camadas (núcleo + envelope) 77

6 Extensão a outros satélites de Saturno **82**
6.1 Satélites internos- Enceladus, Tethys e Dione 82
6.2 Analisando a expansão orbital dos satélites devido à dissipação por maré . 87

7 Discussão e Conclusão **93**
7.1 Metodologia e parâmetros utilizados 93
7.2 Expansão orbital de Mimas 95
7.3 Migração dos outros sete satélites de Saturno 98

Referências Bibliográficas **100**

Capítulo 1

Introdução

1.1 Saturno

Saturno é o sexto planeta, em relação ao Sol, e o segundo maior do Sistema Solar. Apresentando um diâmetro de cerca de 120 000 km, seu sistema de anéis o difere dos demais planetas. Saturno é predominantemente formado por hidrogênio e hélio, possuindo um núcleo composto por rocha e metais (principalmente ferro)[1]. Sua densidade é menor do que a densidade da água, cerca de 620 kg/m^3.

O sistema de anéis é formado por fragmentos de rocha e gelo. Ao todo são 7 anéis (A, B, C, D, E, F e G), sendo os anéis A e B os mais extensos e densos (ver 1.2. Eles são separados por uma lacuna conhecida como *Divisão Cassini*, a qual ocorre devido à ressonância entre as partículas desta região e o satélite Mimas (Iess et al., 2019). Estima-se que a massa total dos anéis seja aproximadamente igual à massa de Mimas. Estudos recentes da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) apontam que os anéis estão ficando mais escassos, isso porque suas partículas estão sendo ejetadas ou colidindo com o planeta (O'Donoghue et al., 2019).

Saturno é o segundo planeta a possuir o maior número de satélites do Sistema Solar [2]. A maior parte deles são pequenos ou medianos (diâmetros entre $\sim 10^{-1}$ e $\sim 10^3$ km). Alguns tão pequenos que conseguem orbitar em lacunas entre os anéis, como é apresentado pela Figura 1.1. Seus satélites são conhecidos por possuírem características únicas. O maior deles, Titan, é o único satélite do Sistema Solar a possuir atmosfera, por sua vez, semelhante a da Terra. Enceladus possui atividade geológica, assim como Tethys (Porco et al., 2006). Mimas possui crateras devido à sua formação. Além das diversas ressonâncias orbitais entre os satélites que acaba por caracterizar suas evoluções.

[1] https://solarsystem.nasa.gov/planets/saturn/in-depth
[2] *Astronomers find a dozen more moons for Jupiter*

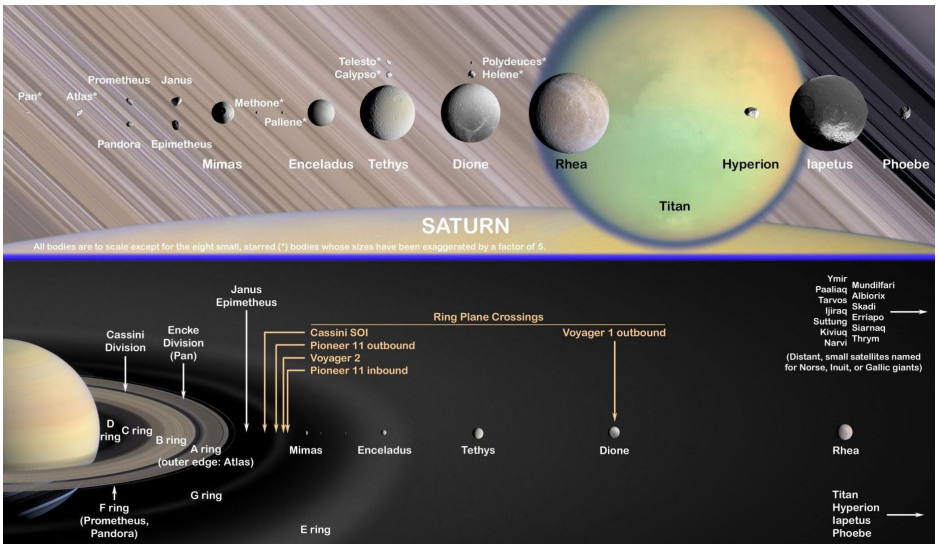


FIGURA 1.1. Ilustração de Saturno e alguns de seus satélites. A imagem superior compara o tamanho de seus satélites, desde o maior de todos, Titan, até o satélite pastor Pan. A imagem inferior apresenta o planeta, seus anéis e a distância em que alguns satélites encontram-se de Saturno. Créditos: NASA/JPL/David Seal

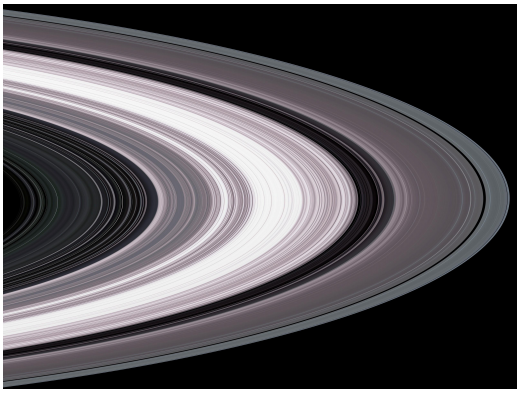


FIGURA 1.2. Imagem dos anéis A, B, C e D, sendo o anel D o mais interno. Notemos que o anel B é o mais brilhante, devido a quantidade de partículas de gelo que ele possui. A imagem foi realizada pela sonda Cassini em 2005. Créditos: NASA/JPL

1.1.1 Missões espaciais em Saturno

Há pouco mais de 400 anos atrás, em 1610, Saturno foi observado pela primeira vez através de luneta. O feito foi do astrônomo Galileu Galilei. Galileu notou que o planeta apresentava um formato diferenciado, porém, como seu equipamento era rudimentar, pensou que se tratava de satélites que orbitavam o planeta ou algum defeito óptico (Galilei & Van Helden, 2016). Somente 40 anos depois, em torno de 1655, Christiaan Huygens fez a consideração de que o planeta possuía um único e rígido anel, além da descoberta do maior satélite de Saturno, Titan (Van Helden, 2004). Entre 1771 e 1775, Jean Dominique Cassini descobriu outros quatro satélites: Iapetus, Rhea, Tethys e Dione como também observou a existência de uma divisão nos anéis conhecida como *Divisão*

Cassini [3].

Nos séculos seguintes, com o avanço da tecnologia, quatro sondas espaciais se aproximaram do planeta. A primeira foi a *Pioneer 11*, em 1979. Entre as muitas descobertas da *Pioneer 11* estavam o registro das temperaturas de Titan e de Saturno, fora a descoberta de um estreito anel além do anel A, que foi chamado de anel F. Os estudos dos dados reunidos pela sonda sugeriram que Saturno era composto princialmente de hidrogênio em sua forma líquida [4]. A segunda e terceira sondas foram as *Voyager 1 e 2*. Ambas foram lançadas em 1977 com o objetivo de estudar o Sistema Solar exterior e os planetas gigantes. As sondas observaram que os anéis são formados por objetos, compostos de gelo e poeira, cujas dimensões variam desde centímetros até alguns metros. Além disso, foi possível observar a presença de uma atmosfera no Titan. Mais ainda, *Voyager 1 e 2* apresentaram imagens de alguns satélites de Saturno, dentre eles: Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea e Titan, sendo possível concluir que tais satélites eram gelados. As missões ainda estão ativas e as duas sondas encontram-se a mais de dezoito bilhões de quilômetros do Sol [5].

No final de 1997 dava-se início a mais importante missão à Saturno, a missão *Cassini-Huygens*. A nave, não tripulada, levava consigo a sonda *Huygens*, cujo principal objetivo era mapear o satélite Titan. *Cassini* chegou em Saturno em 2004 já trazendo a descoberta de três novos satélites: Aegaeon, Methone e Pallene. A descida da sonda *Huygens* em Titan ocorreu no final do ano de 2005 (Kirk et al., 2005). As imagens obtidas pela *Huygens* mostraram a existência de nuvens, lagos e mares de metano em Titan, além de conter uma porcentagem de água congelada. Foram observadas também algumas dunas de poeira e um relevo não-linear (McEwen et al., 2005; Tokano et al., 2006).

Outro feito importante da Cassini foram suas descobertas em relação a Enceladus. Foi confirmado que o satélite apresenta atividade geológica, possuindo um oceano subsuperficial de água salgada. Jatos de vapor emanados da região polar de Enceladus também foram observados (Johnson, 2005; Hansen et al., 2006). Esses jatos são devido à atividade em sua região polar sul por conta do criovulcanismo [6]

Com o esgotamento do combustível, a missão de 13 anos em Saturno foi encerrada. A Cassini foi de encontro a Saturno em Setembro de 2017. Mesmo durante a queda,

[3] The Saturn System Through the Eyes of Cassini (e-Book)
[4] https://solarsystem.nasa.gov/missions/pioneer-11/in-depth/
[5] https://voyager.jpl.nasa.gov/mission/
[6] O criovulcanismo é o processo de formação de um tipo de vulcão que expele substâncias voláteis, como a água. Além de Enceladus, o criovulcanismo também é observado em Plutão (Singer et al., 2022).

a sonda permaneceu enviando dados para a Terra em tempo real. Seus recursos foram utilizados até seu último segundo [7].

A decisão de destruir o artefato de maneira a não deixar vestígios deve-se à preocupação de evitar uma possível contaminação com material terrestre de alguma das luas, se porventura acabasse se chocando com uma delas.

1.2 Consequência da ação da Força de maré nos satélites de Saturno

1.2.1 Satélite Mimas

Mimas é o menor e mais interno dentre os satélites medianos, levando em torno de 23 h para orbitar Saturno, metade do período orbital de Tethys. Assim, Mimas e Tethys encontram-se em uma ressonância orbital 4:2. A superfície de Mimas é predominantemente composta por crateras de impacto, como pode ser observado na Figura 1.4. A maior delas é a cratera *Hershel*, com cerca de 130 km de diâmetro (Ferguson et al., 2022). O satélite não apresenta nenhuma atividade geológica em comparação com outros satélites internos, como por exemplo Enceladus (Schenk, 2011). Entretanto, alguns estudos relacionados à libração[8] consideram que Mimas possua um oceano abaixo de sua superfície. Isso pode ser explicado por conta do aquecimento do satélite devido à liberação de energia por fricção de maré (Tajeddine et al., 2014; Neveu & Rhoden, 2017; Rhoden & Walker, 2022).

Em relação à sua formação, alguns modelos preveem que Mimas tenha se formado a partir dos anéis de Saturno, enquanto outros sugerem que o satélite tenha se formado em aproximadamente 10^8 anos (Charnoz et al., 2011; Ćuk et al., 2016). Todavia, alguns trabalhos relacionados às crateras de Mimas estimam que o satélite tenha se formado junto com Saturno (Schmedemann & Neukum, 2011). Discutiremos com mais detalhes esse assunto no capítulo 7.

[7] About the Mission- Cassini

[8] Mimas apresenta a mesma face voltada para Saturno. Ou seja, seu período de rotação coincide com seu período orbital. Essa é uma consequência dos efeitos de maré. Corpos que estão *travados por maré* sofrem um torque gravitacional resultando em oscilações de seus eixos de simetria, as chamadas *librações forçadas*. Tajeddine et al. (2014) estudaram a libração em longitude de Mimas

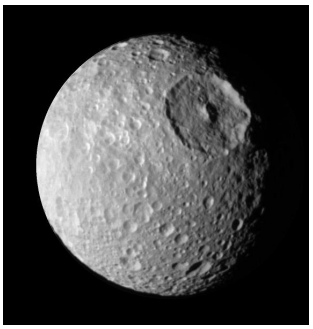


FIGURA 1.3. Imagem de Mimas feita durante a MIssão Cassini em 2005. Mimas é um satélite gelado com quase 400km de diâmetro e uma superfície cravejada de crateras de impacto. Na imagem é possível ver a cratera Hershel. Créditos: NASA/JPL/*Space Science Institute*

1.2.2 Os efeitos de maré

Os efeitos de maré são observados por todo o Sistema Solar e também externo a ele. A elevação dos oceanos na Terra, as marés, é resultado da atração gravitacional da Lua com nosso planeta. Além disso, a Lua apresenta rotação síncrona, ou seja, seu período de rotação se iguala ao seu período orbital.

No final do século XVII, utilizando a gravitação e sua formulação matemática, Isaac Newton explicou o fenômeno das marés na Terra devido à atração que a Lua exerce no planeta (Newton, 2017). Ele propôs um modelo de um sistema de dois corpos, o sistema Terra-Lua, girando em torno de um centro de massa comum. Com isso, foi possível calcular a força resultante da interação gravitacional para diversos pontos na superfície da Terra e suas consequências de deformação. A Figura 1.4 apresenta uma ilustração desses vetores resultantes na superfície do planeta Terra como consequência da ação da Força de maré devido à Lua. No capítulo 2, a ação da Força de maré será discutida e formulada matematicamente.

Dois séculos após os estudos de Newton, começaram a surgir as primeiras teorias em relação à rotação da Terra e o movimento orbital da Lua. Darwin explicou a relação entre a variação da velocidade de rotação da Terra e a variação do semi-eixo maior da Lua (Darwin, 1880). Em 1921, foi desenvolvido uma espécie de sistema para identificar os potenciais em forma harmônica, os quais dão origem às forças de maré (Doodson, 1921). Nas décadas posteriores, as teorias de maré existentes foram sendo utilizadas na análise dos efeitos de maré tanto no sistema Terra-Lua quanto em outros satélites do Sistema Solar (Kaula, 1964; Goldreich & Soter, 1966; Mignard, 1979; Dermott, 1979; Hut, 1981; Meyer & Wisdom, 2008; Na, 2012).

Teorias mais recentes possibilitam que as equações para o estudo dos efeitos de maré também sejam aplicadas em corpos rígidos, como por exemplo a Terra. O modelo de fluência (*creep*) é um exemplo (Ferraz-Mello, 2013). Ele se assemelha ao modelo

FIGURA 1.4. Ilustração de Saturno e alguns de seus satélites. Ilustração dos vetores da Força de maré atuando na Terra devido à Lua. Na direção da reta que une os centros de massas dos corpos o vetor resultante, ou F_m, aponta para fora causando um alongamento do corpo. Créditos: Tidal Forces: Lunar Tides

de Maxwell no estudo da reologia de materiais viscoelásticos. Folonier et al. (2018) estudaram as variações do semi-eixo e excentricidade de Enceladus e Mimas em relação às suas viscosidades[9]. Em Folonier & Ferraz-Mello (2017) o modelo foi aplicado no estudo da rotação de Titan considerando que o satélite não é homogêneo e, portanto, é formado por várias camadas.

1.2.3 Efeitos de maré nos satélites de Saturno

A a ação da força de maré se estende desde a formação de um sistema planetário até na explicação da observação de água em satélites de planetas gigantes. O Sistema Solar possui diversas consequências resultantes das forças de maré. Nos satélites de Saturno, a maré altera seus semi-eixos, estruturas internas e rotações. Os satélites medianos Mimas, Enceladus, Tethys e Dione estão aumentando seu semi-eixos orbitais com o passar do tempo. Todos são satélites gelados. Por conta de seus jatos de vapor de água, acredita-se que Enceladus seja o principal provedor de material para o anel E de Saturno (Spahn et al., 2006). Assim como Enceladus, estudos apontam que Mimas também possui um oceano subsuperficial. Eles são formados por conta do aquecimento de maré (Porco et al., 2006). Como a ação da força acaba criando um atrito, o corpo gera calor e parte do gelo presente nele derrete. A água se concentra abaixo da crosta gelada formando assim uma camada de água líquida. Sohl et al. (2006) analisaram a estrutura interna de Mimas e Enceladus devido a dissipação de energia por maré. Nakajima et al. (2019) estudaram a evolução orbital de Mimas, Enceladus, Tethys Dione e Rhea considerando a interação de maré dos satélites com Saturno e seus os anéis. Dependendo do valor da massa considerada para os anéis, o tempo de formação de Enceladus e Tethys são

[9]Os valores para as viscosidades foram pressupostos com base nas dissipações de energia dos satélites e suas estruturas internas.

alterados. Além disso os anéis influenciam nos cruzamentos orbitais destes satélites, bem como no aquecimento devido à maré em Enceladus.

Alguns trabalhos explicam a formação dos anéis de Saturno através da ruptura por maré. Canup (2010) assume que um satélite de massa e tamanho de Titan ultrapassou seu limite de Roche[10] rompendo-se em inúmeros fragmentos. Parte desses fragmentos espiralaram em volta de Saturno e formaram o anel e outra parte acretou formando alguns satélites. Trabalhos recentes, como o Wisdom et al. (2022), apontam a mesma ideia para um satélite do tamanho de Iapetus.

Uma outra consequência dos efeitos de maré são as ressonâncias de movimentos médios (RMM; em inglês: *mean motion resonance*). A RMM ocorre quando a razão entre os movimentos médios ou períodos orbitais de dois ou mais corpos resulta em uma razão de números inteiros. As interações gravitacionais entre os corpos fazem com que suas órbitas sejam perturbadas. A força de maré é uma força de cunho perturbativo causando um efeito cumulativo em sistemas que estão em oscilação. Tal força faz com que os satélites variem seus semi-eixos cruzando ressonâncias entre eles. Desta maneira um satélite pode ser capturado e evoluindo em RMM. Através de simulações numéricas Neveu & Rhoden (2019) analisou a evolução orbital, interna e térmica dos cinco satélites medianos de Saturno (Mimas, Enceladus, Tethys, Dione e Rhe) considerando as ressonâncias orbitais em que esses satélites ficaram capturados. No trabalho foi mostrado que a proximidade de Mimas com os anéis de Saturno gera interações que resultam em uma rápida expansão orbital do satélite, de maneira que ele teria sido formado em $t \leq 10^9$ anos.

Enceladus e Dione estão atualmente em ressonância 2:1. Titan e Hyperion encontram-se em ressonância 4:3. Como já mencionado, Mimas está em ressonância 4:2 com Tethys. Todavia, além desta, Mimas encontra-se em RMM com outros pequenos satélites: Aegaeon, Methone e Anthe. Seus diâmetros e semi-eixos variam entre 0,33–1,45 km e 168,033–198,106 km, respectivamente (Porco et al., 2005; Rodríguez & Callegari, 2021). Ou seja, Methone e Anthe estão localizados entre Mimas e Enceladus e Aegaeon encontra-se entre Mimas e Saturno, mais especificamente imerso no anel G. Aegaeon está em ressonância 7:6 com Mimas, enquanto Methone e Anthe estão em ressonâncias 14:15 e 10:11, respectivamente. Para compreender como ocorreu a captura destes satélites em ressonância, é necessário analisar a migração de Mimas em relação à Saturno.

Neste trabalho investigamos a evolução orbital de Mimas devido à dissipação por maré em Saturno. Utilizamos o modelo clássico para a maré em Saturno e o modelo de fluência para a maré em Mimas. Modelamos Saturno como um corpo de duas camadas,

[10]Menor distância que um corpo secundário consegue chegar do primário sem que as forças de maré acabem por exceder a força de auto-gravidade do corpo

onde o planeta é formado por um núcleo sólido viscoelástico rodeado por um envelope gasoso. Nos capítulos 2 e 3 apresentamos a fundamentação teórica de maré, baseada nos modelos clássico e de fluência, e os principais objetivos da pesquisa. No capítulo 4 trazemos a metologia utilizada no estudo. Consideramos a reologia de Maxwell na dissipação por maré no núcleo e o mecanismo de *resonance locking* na dissipação por maré no envelope de gás (Lainey et al., 2020). Além disso, definimos alguns parâmetros utilizados e seus respectivos valores. No capítulo 5 apresentamos os resultados obtidos para a expansão orbital de Mimas em relação à dissipação em cada camada do planeta e em relação a dissipação simultânea das camadas. No capítulo 6 estendemos nossa análise para Enceladus, Tethys, Dione, Rhea, Titan, Hyperion e Iapetus, ilustrados na Figura 1.1. Por fim, no capítulo 7 apresentamos as conclusões e algumas limitações que observamos diante dos resultados obtidos.

Capítulo 2

Efeitos de Maré

A Lei da Gravitação Universal unificou os métodos de atração entre os corpos celestes. Assim, qualquer matéria ou corpo celeste respeita uma única força, a gravitacional. Os efeitos gravitacionais entre a Terra e a Lua são estudados há séculos. No século XVII, Newton estudou um fenômeno de consequência gravitacional no sistema Terra-Lua que elevava o nível dos oceanos do planeta, as marés.

2.1 Modelo clássico (*Darwin*)

Nesta seção abordaremos alguns aspectos da teoria de maré com base no modelo de Darwin (Darwin, 1880). Este modelo abrange somente corpos fluidos. Utilizaremos o trabalho de Ferraz-Mello et al. (2008) como nossa principal referência.

2.1.1 Maré estática

2.1.1.1 Potencial interno e Força

Primeiramente precisamos definir a figura de equilíbrio deformada. Consideraremos um sistema planeta-satélite, em que o corpo central é um elipsoide de viscosidade e volume constantes (Chandrasekhar, 1987)– ver Figura 2.1.

Um elipsoide é descrito através da equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{2.1}$$

onde (x, y, z) são as coordenadas cartesianas e (a, b, c) são os semi-eixos do corpo (Poisson & Will, 2014). Quando dois dos semi-eixos do elipsoide são iguais temos um esferoide

prolato, o qual se alonga em relação ao eixo x, de acordo com a Figura 2.1. A *elipsidade* define o achatamento que um corpo sofre ao longo de seu diâmetro. Dessa maneira, o corpo pode apresentar o formato de um esferoide (Danby, 1988)

$$\epsilon = 1 - \frac{c}{a}. \tag{2.2}$$

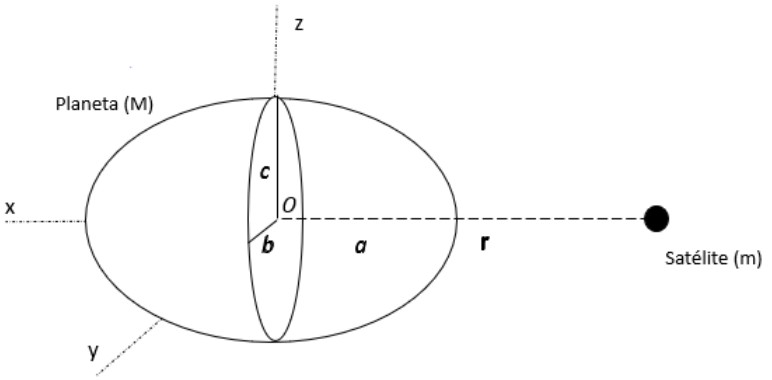


FIGURA 2.1. Ilustração de um sistema de planeta-satélite de massas M e m, respectivamente. A distância entre os centros de massa dos corpos é dada por $\mathbf{r}$. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008).

Ferraz-Mello et al. (2008) define a deformação do corpo central, de massa M, devido ao companheiro de massa m a partir da equação 2.2

$$\epsilon = \frac{15}{4}\frac{M}{m}\left(\frac{R}{r}\right)^3, \tag{2.3}$$

onde r e R são a distância entre os centros de massa dos corpos e o raio do planeta, respectivamente. Tendo em vista que M e m orbitam o centro de massa do sistema, as forças gravitacional (F_g) e centrífuga (F_{cf}) equilibram-se. Podemos realizar uma breve discussão acerca dessas forças. Tomando o sistema Terra-Lua, a força centrífuga é a mesma em qualquer ponto da superfície da Terra. A partir da Figura 2.2 observamos que as forças gravitacional e centrífuga são paralelas na linha que une os centros de massas da Terra e da Lua. Contudo, a força gravitacional não apresenta o mesmo valor em cada ponto da superfície do planeta, visto que $F_g \sim 1/r^2$. Logo, F_{cf} e F_g não serão paralelas em todos os pontos. Dessa maneira, a força resultante F_r faz com que a porção de água na Terra em relação aos pontos mais próximos e mais afastados da Lua se eleve. Ao longo do capítulo discutiremos com mais detalhes essa diferença de forças.

Considerando agora um ponto P na superfície do planeta, de maneira que a distância de P até o centro de massa do satélite seja dada por r e seu raio, nesse caso, seja dado por r_p, como mostra a Figura 2.3. O potencial V no ponto P do planeta

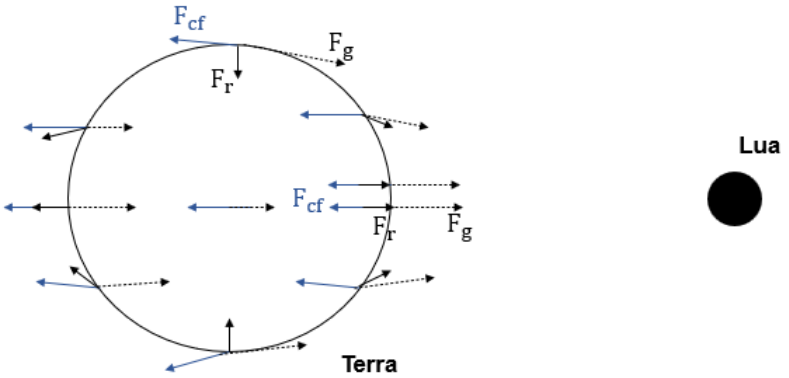


FIGURA 2.2. Ilustração dos vetores de força centrífuga (F_{cf}) e gravitacional (F_g) no planeta Terra sendo perturbado pela Lua. O vetor força resultante F_r, em azul, é o vetor força de maré.

devido ao satélite é dado por

$$V = -\frac{Gm}{q}, \tag{2.4}$$

onde G é a constante gravitacional. Através da Lei dos cossenos encontramos que $q = r\left(1 + \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 - 2\frac{r_p}{r}\cos\theta\right)^{1/2}$ (Murray & Dermott, 1999).

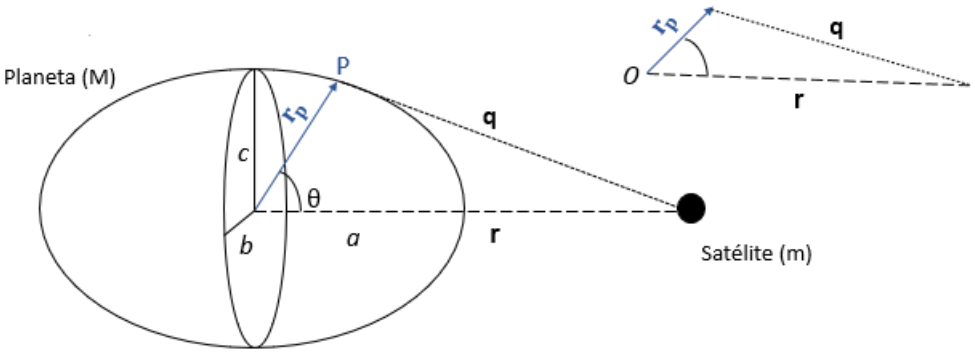


FIGURA 2.3. Ilustração de um planeta de massa M perturbado por um satélite de massa m. Sendo $\mathbf{r}$ a distancia entre os centros de massa de M e m, $\mathbf{q}$ a distância entre o ponto P e o centro de massa de m, $\mathbf{r}_p$ a distância do centro de massa de M e o ponto P e θ o ângulo formado entre $\mathbf{r}_p$ e $\mathbf{r}$. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008).

Supondo que $r_p \ll r$, substituindo a expressão que define q na equação 2.4 e expandindo-a em termos de multipolo, obtemos

$$V = -\frac{Gm}{r}\left(1 + \frac{r_p}{r}\cos\theta + \left(\frac{r_p}{r}\right)^2 \frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + ...\right) \tag{2.5}$$

$$= -\frac{Gm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_p}{r}\right)^n P_n \cos\theta, \tag{2.6}$$

onde P_n é o Polinômio de *Legendre* de ordem n. O primeiro termo da equação (2.5), corresponde a $P_0(\cos\theta) = 1$. Como estamos considerando que a distância $\mathbf{r}$ é fixa, o potencial $-Gm/r$ não varia e portanto, não existe força e nem aceleração associadas a

este termo. O segundo termo $P_1(\cos\theta) = -(r_p/r)\cos\theta$ denota o potencial no ponto P, onde $V = -\left(Gm/r^2\right) r_p \cos\theta$. Logo, esse potencial produz uma força em P. O potencial $V = \left(-Gm{r_p}^2/r^3\right) P_2(\cos\theta)$ ou para $P_{n>2}$ é denotado *potencial de maré*. Em vista disso, o potencial de maré pode ser descrito como (Murray & Dermott, 1999; Mignard, 1979)

$$V_m = -\frac{Gm}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r_p}{r}\right)^n P_n \cos\theta. \tag{2.7}$$

Murray & Dermott (1999) realizam uma breve discussão em relação ao potencial de maré

$$V_m = -\frac{Gmr_p^2}{r^3}\frac{1}{2}\left(3\cos^2\theta - 1\right). \tag{2.8}$$

Notemos que quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, encontramos o valor absoluto máximo para V_m. Ao passo que quando $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$ encontramos o valor absoluto mínimo para V_m. No caso da Terra, tal fato explica a ocorrência de duas marés altas e duas marés baixas todos os dias em razão da atração da Lua.

Sabemos que $F = -\nabla V$, portanto a força de maré é dada por

$$\frac{F_m}{M} = \frac{F_P}{M} - \frac{F_o}{M}. \tag{2.9}$$

Logo, F_m pode ser encontrada através da diferença da força gravitacional devido à m em um ponto da superfície do planeta e da força gravitacional em seu centro de massa. Uma maneira direta e aproximada de encontrar a força de maré *máxima* é derivando a força gravitacional em relação à distância r

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \tag{2.10}$$

cuja derivada resulta em

$$\mathbf{F_m} = \frac{d\mathbf{F}}{dr} = \frac{2GMm}{r^3}\hat{r}. \tag{2.11}$$

A equação 2.11 resulta na F_m máxima, ou seja, considerando o ponto na superfície do planeta na direção do centro de massa dos dois corpos. Notemos que F_m é inversamente proporcional ao cubo da distância. Sendo assim, quanto mais próximo o satélite estiver do planeta maior será o efeito causado.

2.1.1.2 O Potencial Perturbador

Consideraremos agora um ponto arbitrário no espaço e que seja externo ao planeta. Definimos r^* como sendo a distância entre o ponto P e o ponto arbitrário. O potencial

gravitacional de um elemento de massa dm em M é dado por (Poisson & Will, 2014)

$$U = \int \rho \frac{dV}{|\mathbf{r}_p - \mathbf{r}^*|}, \tag{2.12}$$

onde $\rho = m/V$.

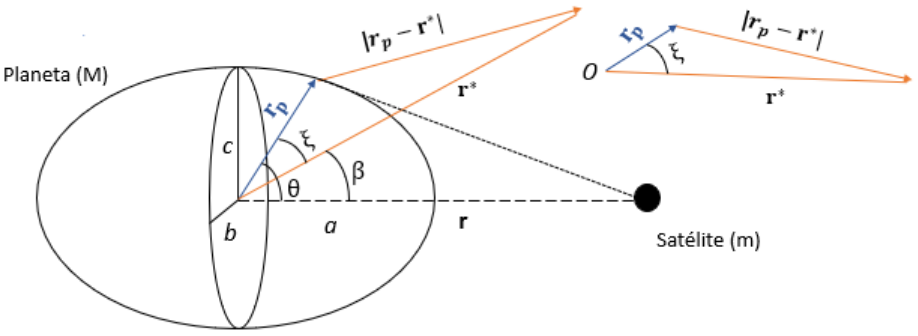


FIGURA 2.4. Ilustração de um planeta de massa M perturbado por um satélite de massa m. Onde $\mathbf{r}$ é a distancia entre os centros de massa de M e m, $\mathbf{r}^*$ a distância entre o centro de massa de M e um ponto arbitrário no espaço, $\mathbf{r}_p$ a distância do centro de massa de M e o ponto P. Chamamos de ξ é o ângulo formado entre $\mathbf{r}_p$ e $\mathbf{r}^*$. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008).

Como nosso objetivo é encontrar o potencial em um ponto afastado de M, novamente podemos expandir em série o termo $|\mathbf{r_p} - \mathbf{r}^*|^{-1}$. Assumindo que $r_p \ll r^*$, obtemos (Beutler, 2005):

$$|\mathbf{r_p} - \mathbf{r}^*|^{-\mathbf{1}} = \frac{1}{r^*}\left[1 + \frac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^*}{r^{*2}} - \frac{1}{2}\frac{r_p^2}{r^{*2}} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r_p} \cdot \mathbf{r}^*)^2}{r^4}\right], \tag{2.13}$$

onde $\cos\xi = \dfrac{\mathbf{r}_p \cdot \mathbf{r}^*}{\mathbf{r}^*\mathbf{r}_p}$ (Neto, 2010). Substituindo a equação (2.13) em (2.12), encontramos

$$U = G\int_{\mathcal{V}} \frac{\rho}{r}\left[1 + \frac{\mathbf{r_p} \cdot \mathbf{r}^*}{r^{*2}} - \frac{1}{2}\frac{r_p^2}{r^{*2}} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r_p} \cdot \mathbf{r}^*)^2}{r^{*4}}\right] dV \tag{2.14}$$

$$= G\left[\frac{1}{r^*} - \frac{1}{2r^{*3}}\int_{\mathcal{V}} r^{*2}\rho dV + \frac{3}{2r^{*5}}\int_{\mathcal{V}}\left(r_{xp}^2 r_x^{*2} + r_{yp}^2 r_y^{*2} + r_{zp}^2 r_z^{*2}\right)\rho dV\right]. \tag{2.15}$$

A primeira integral se resume a $1/r^*$ devido a definição de $\rho = m/V$. Ou seja, a integral resulta em m (massa). A segunda integral desaparece, pois estamos considerando um sistema fixo no centro de massa de M (Beutler, 2005). Para calcular a terceira integral usaremos a definição de momento de inércia. De modo que

$$I = \int r^2 \rho dV. \tag{2.16}$$

Seguindo Beutler (2005), consideraremos um sistema referencial dado por $r_p = (x_p, y_p, z_p)$ com origem em O. Descrevendo o potencial U em termos dos momentos de inércia em relação a cada eixo (*Principal moments of inertia*) encontramos

$$\int \frac{\rho}{|r_p - r^*|} dV = \frac{1}{r^*} + \frac{A+B+C}{2mr^3} - \frac{3}{2}\frac{r_x^{*2}A + r_y^{*2}B + r_z^{*2}C}{mr^{*5}}, \tag{2.17}$$

onde:

$$I_{y_p z_p} = A = \int \rho \left({y_p}^2 + {z_p}^2\right) dV, \tag{2.18}$$

$$I_{x_p z_p} = B = \int \rho \left({x_p}^2 + {z_p}^2\right) dV, \tag{2.19}$$

$$I_{x_p y_p} = C = \int \rho \left({x_p}^2 + {y_p}^2\right) dV. \tag{2.20}$$

A partir das equações acima, podemos estabelecer as seguintes relações

$$\int \rho \left({x_p}^2\right) dV = \frac{A+B+C}{2} - A, \tag{2.21}$$

$$\int \rho \left({y_p}^2\right) dV = \frac{A+B+C}{2} - B, \tag{2.22}$$

$$\int \rho \left({y_p}^2\right) dV = \frac{A+B+C}{2} - C. \tag{2.23}$$

Definindo $I_{r^*} = (A{r_x}^{*2} + {r_y}^{*2}B + {r_z}^{*2}C)r^{*-2}$ como o momento de inércia de M na direção de um vetor unitário e substituindo I_{r^*} na equação (2.17), obtemos

$$U_2 = -\frac{Gm}{r^*} + G\frac{(A+B+C-3I_{r^*})}{2mr^{*3}}. \tag{2.24}$$

A equação (2.24) é conhecida como fórmula de *MacCullagh* (Allman, 1849; Scaife, 1990). Ela representa o potencial da força de atração exercida pela distribuição de massa ρdV sobre uma massa pontual.

Tomando a Figura 2.3 como referência, é possível decompor $r^{*2} = ({r_x}^{*2}, {r_y}^{*2}, {r_z}^{*2})$ em função de r e β. Desse modo, temos

$${r_x}^{*2} = r^{*2}\cos^2\beta \tag{2.25}$$

e

$${r_x}^{*2} + {r_y}^{*2} + {r_z}^{*2} = r^{*2}. \tag{2.26}$$

Substituindo a equação 2.25 na equação 2.26, encontramos que: ${r_y}^{*2} + {r_z}^{*2} = r^{*2}\sin^2\beta$. Inserindo esta relação junto com a equação 2.25 em 2.17, chegamos em

$$U_2 = -\frac{GM}{r^*}\left[1 + \frac{B-A}{2mr^{*2}}(3\cos^2\beta - 1)\right]. \tag{2.27}$$

Estamos considerando o planeta como um esferoide prolato, onde $a > c$ ou $c = a(1-\epsilon)$. Logo, se $B - A \simeq \epsilon A$, onde ϵ é dado pela equação 2.3, temos que:

$$U_2 = -\frac{GM}{r^*} - \frac{k_f GmR^5}{2r^3 r^{*3}}(3\cos^2\beta - 1), \tag{2.28}$$

sendo $k_f = 15A/4mR^2$ o *Love number* fluido e R o raio de M. O parâmetro k_f descreve a resposta de M, totalmente fluido e sem rotação, devido à ação da força de maré de m (Padovan et al., 2018). Qualquer atraso na deformação do corpo M não tem nenhum efeito considerável, visto que como o planeta está em equilíbrio hidrostático, as respostas às forças de maré serão instantâneas.

Portanto, a equação 2.28 nos fornece o potencial de maré associado à deformação sofrida por M devido a m tomando um ponto arbitrário no espaço. Ressaltemos que consideramos somente até a segunda ordem da expansão novamente ($n = 2$), pois este é o termo dominante para a perturbação em relação ao demais. Outro ponto válido é que na equação U_2 é o potencial externo até segunda ordem, em um ponto fora de M, enquanto que V_m foi calculando considerando um ponto P na superfície de M.

2.1.2 Maré dinâmica

Nesta seção consideraremos que o planeta M não é formado por um fluido perfeito e sim viscoelástico. Se na seção anterior a resposta do planeta era imediata, aqui consideraremos que a viscosidade induz um atraso entre a ação da força por m e a resposta de M. Este caso é análogo ao oscilador harmônico amortecido. O planeta deformará e retornará ao seu estado de equilíbrio com uma determinada frequência de oscilação. Portanto, o atraso está diretamente ligado a adição de uma fase no ângulo das funções periódicas do potencial (Correia & Laskar, 2003). Além disso, esta oscilação associada à forma do corpo gera uma fricção dissipando energia interna no planeta e consequentemente alterando o semi-eixo maior e excentricidade do satélite.

2.1.2.1 Ângulo de atraso

De Ferraz-Mello et al. (2008), as expansões das funções periódicas são dadas por

$$\cos(\Phi_i + \delta_i) \simeq \cos\Phi_i + \cos\delta_i \tag{2.29}$$

$$\cos(\Phi_i - \delta_i) \simeq \cos\Phi_i - \cos\delta_i \tag{2.30}$$

onde Φ_i é um ângulo genérico e δ_i é o ângulo de defasagem associado a uma frequência ν_i [1].

Consideraremos que o período de rotação Ω do planeta é superior ao período orbital n do satélite. A situação ideal seria o bojo de maré do planeta acompanhar o movimento orbital do satélite. Todavia, há uma discrepância nas velocidades de rotação e orbital do planeta e do satélite, respectivamente. A Figura 2.5 ilustra dois possíveis casos: quando $\Omega \gg n$ o planeta tende a "arrastar" consigo o bojo, o qual se encontra em uma posição adiantada ao satélite. No entanto, a tendência é que a atração gravitacional referente ao satélite direcione o bojo ao centro de massa do satélite. Isso faz com que a velocidade de rotação do planeta vá diminuindo. Como o momento angular $L = \omega r$ deve ser conservado, logo diminuindo a velocidade de rotação, a distância entre os centros de massa do planeta e do satélite deve aumentar. Assim, o satélite migra para fora. O segundo caso ocorre quando $\Omega \ll n$. O satélite fica em uma posição adiantada ao bojo e por conta da atração gravitacional tende a mantê-lo em sua direção. Isso causa um aumento na rotação do planeta e, por conservação do momento angular, a distância entre os dois corpos diminui fazendo com o satélite migre para dentro.

2.1.2.2 Potencial e Força de maré

Na equação 2.28 utilizamos o *Love number* k_f, pois estávamos considerando que o planeta era composto de um fluido perfeito. Entretanto, para a parte dinâmica iremos considerar que o planeta possui rigidez e substituiremos k_f por k_j e k_d. Temos que k_j é o *Love number* relacionado às componentes dependentes da frequência de maré e k_d o *Love number* dinâmico (Ferraz-Mello et al., 2008). Definimos um novo parâmetro associado à k_j e k_d:

$$\delta'_j = \frac{k_j}{k_d}\delta_j. \tag{2.31}$$

Considerando os vetores de M até m e de M até o ponto arbitrário, de modo que $\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi)$ e $\mathbf{r}^* = (r^*, \theta^*, \varphi^*)$. Os ângulos θ e θ^* são as co-latitudes e φ e φ^* as

[1] Por exemplo, para $i = 0$, $\nu_0 = 2(\Omega - n)$ (ver Tabela 1 de Ferraz-Mello et al. (2008)).

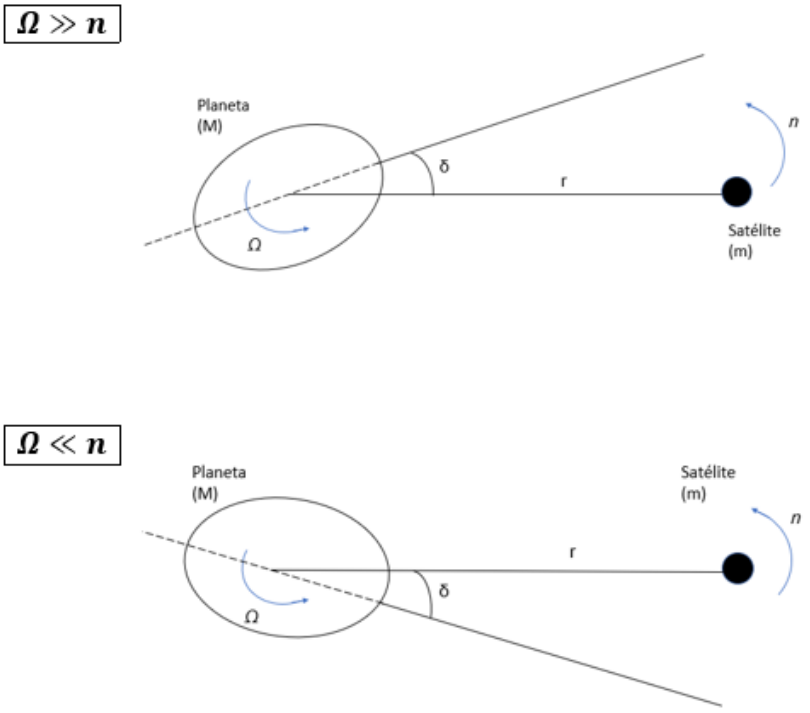


FIGURA 2.5. Ilustração de um planeta de massa M perturbado por um satélite de massa m. δ é o ângulo entre a direção do bojo de maré no planeta e o satélite. No caso em que $\Omega \gg n$, o satélite migra para fora. Já no caso em que $\Omega \ll n$, o satélite migra para dentro.

longitudes (ver Figura 2.6). Tomando Ferraz-Mello et al. (2008), é possível introduzir relações entre os elementos orbitais de M com r, θ e ϕ. De maneira que,

$$\cos\beta = \cos\theta\cos\theta^* + \sin\theta\sin\theta^*\cos(\varphi - \varphi^*), \tag{2.32}$$

$$\sin\theta = \cos(\omega + f)\cos\varphi + \sin(\omega + f)\sin\varphi\cos I, \tag{2.33}$$

$$\cos\theta = \sin(\omega + f)\sin I \tag{2.34}$$

e

$$\varphi \simeq f + w - \frac{1}{4}\sin(2f + 2w)\sin^2 I + \vartheta(I^4), \tag{2.35}$$

onde ω é o argumento do pericentro, I é a inclinação e f a anomalia verdadeira. Expandindo f e r em termos de segunda ordem de excentricidade, em função da anomalia média l, obtemos (Brouwer & Clemence, 1961, capII, sec.6):

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos l + \frac{e^2}{2}(1 - \cos 2l) \tag{2.36}$$

$$f = l + 2e\sin l + \frac{5e^2}{4}\sin 2l, \tag{2.37}$$

onde l e e são a anomalia média e excentricidade, respectivamente.

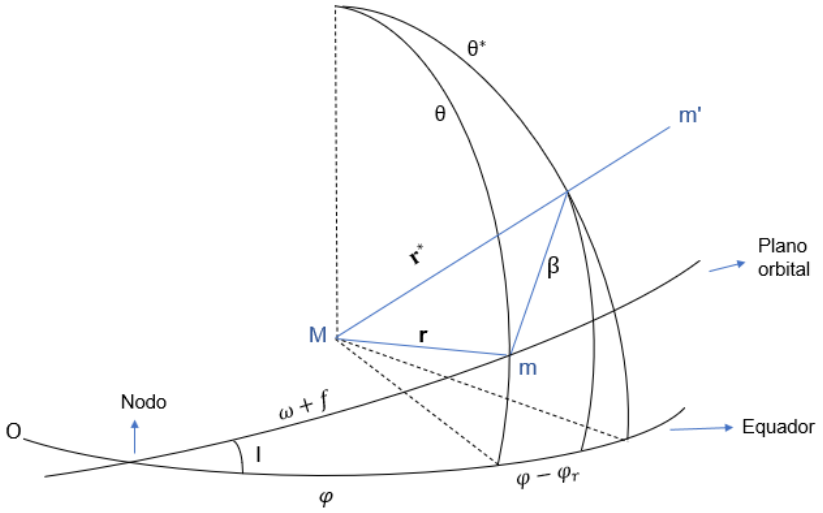


FIGURA 2.6. Ilustração do sistema de coordenadas esféricas com origem no centro de massa do corpo M. Definimos m' como uma massa pontual em um ponto arbitrário. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008)

Reescrevendo a equação 2.28 utilizando as equações 2.32, 2.33, 2.34, 2.35, 2.36 e 2.37 chegamos em

$$
\begin{aligned}
{U_2}^0 = -\frac{3k_f GmR^5}{4a^3 r^{*3}} \Bigg[& \frac{2}{3} - e^2 + \left(1 + \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\sin^2 I\right)\sin^2\theta^* + \left(1 - \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\right)\sin^2 I \\
& \cos\left(2\phi^* - 2l - 2w\right) + \frac{7}{2}e\sin^2\theta^*\cos - \frac{e}{2}\sin^2\theta^*\cos\left(2\phi^* - l - 2w\right) + \frac{17}{2}e^2\sin^2\theta^* \\
& \cos\left(2\phi^* - 4l - 2w\right) - \left(2 - 3\sin^2\theta^*\right)e\cos l - \left(3 - \frac{9}{2}\sin^2\theta_r\right)e^2\cos 2l + \\
& \sin^2\theta^*\sin^2 I\left(\sin\phi^* - \sin\left(\phi^* - 2l - 2w\right)\right) + \frac{1}{2}\sin^2\theta_r\sin^2 I\left(\cos 2\phi^* + \cos\left(2l - 2w\right)\right)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{2.38}
$$

Definimos ${U_2}^0$ como o potencial do planeta sob ação da força de maré do satélite em termos de excentricidades e inclinações.

Inserindo as equações 2.29, 2.30 e 2.31 em 2.38, obtemos

$$
\begin{aligned}
U_{\text{lag}} = -\frac{3k_d GmR^5}{8a^3 r^{*3}} \Bigg[& \sin^2\theta^*\delta_0'\left(2 - 5e^2 - \sin^2 I\right)\sin\left(2\phi^* - 2l - 2w\right) + \\
& e\sin^2\theta^*\left(7\delta_1'\sin\left(2\phi^* - 3l - 2w\right) - \delta_2'\sin\left(2\phi^* - l - 2w\right)\right) + 17e^2\sin^2\theta^*\delta_3' \\
& \sin\left(2\phi^* - 4l - 2w\right) + \sin\theta^*\sin^2 I\delta_4'\sin 2l - e\delta_5'\left(4 - 6\sin^2\theta^*\right)\sin l - 3e^2 - \\
& \delta_6'\left(2 - 3\sin^2\theta^*\right)\sin 2l + \sin^2\theta^*\sin^2 I\delta_7'\sin\left(2l - 2w\right) + 2\sin 2^*\sin I\big(\delta_8'\cos\left(\phi^* - 2l - 2w\right) - \\
& \delta_9'\cos\phi^*\big)\Bigg].
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

Consideramos que $\mathcal{U}_2 = U_2^0 + U_{\text{lag}}$. Notemos que eliminamos o termo k_f fazendo com que o potencial fique apenas com a dependência em k_d e δ'_j.

O potencial $\mathcal{U}_2$ gera uma força em uma massa m^* localizada em r^*. A expressão para a força de maré gerada por M em um ponto arbitrário no espaço $\mathbf{r}^* = (r^*, \theta^*, \phi^*)$ é dada por

$$\mathbf{F} = -m^* \nabla_* U_2 = -m \left[\frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial r^*} \mathbf{r}^* + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \theta^*} \hat{\theta}^* + \frac{1}{r^* \sin\theta^*} \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial \phi^*} \hat{\phi}^* \right]. \tag{2.40}$$

De maneira que

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_2), \tag{2.41}$$

onde F_1 é a força relacionada a componente $\mathbf{r}$, F_2 a força relacionada a $\hat{\theta}^*$ e F_3 a força relacionada a componente $\hat{\phi}^*$. Para calcular a força no corpo perturbador m, basta realizar uma identificação de $(m^*, r^*, \theta^*, \phi^*)$ e (m, r, θ, ϕ) [2]. As componentes da força relacionadas a U_2^0 são:

$$F_1^U = \frac{-3k_f G m^2 R^5}{r^7} \tag{2.42}$$

$$F_2 = F_3 = 0. \tag{2.43}$$

De acordo com a Figura 2.4, de fato, ficamos apenas com a componente radial. Tomando U_{lag} e calculando as componentes da força, respectiva a este potencial, encontramos:

$$F_1(\mathbf{r}^*) = -\frac{3k_d G m R^5}{8a^3 r^{*3}} \Bigg[-3e \left(8\delta'_0 - 7\delta'_1 - \delta'_2 + 2\delta'_5\right) \sin l - 3e^2 \left(21\delta'_0 - 4\delta'_2 - 17\delta'_3 + 4\delta'_5 + 3\delta'_6\right) \sin 2l \, 3\sin^2 I \left(\delta'_0 - \delta'_4 - \delta'_7 - 2\delta'_8 + 2\delta'_9\right) \sin(2l + 2w) \Bigg], \tag{2.44}$$

$$F_2(\mathbf{r}^*) = -\frac{3k_d G m R^5}{8a^3 r^{*3}} \Bigg[e \sin I \left(8\delta'_0 - 7\delta'_1 - \delta'_2 + 6\delta'_5 - 12\delta'_8 + 6\delta'_{15} + 2\delta'_{16}\right) \cos w - e \sin I \left(8\delta'_0 - 4\delta'_2 + 6\delta'_5 2 + 4\delta'_8 - 12\delta'_9 - 6\delta'_{14} + 14\delta'_{17}\right) \cos(2l - 2w) - 4\sin^2 I \left(\delta'_8 \delta'_9\right) \cos(l + w) \Bigg], \tag{2.45}$$

$$F_3(\mathbf{r}^*) = -\frac{3k_d G m R^5}{8a^3 r^{*3}} \Bigg[\left(4 - 14e^2 + \sin I\right) \delta'_0 + 56e^2 \delta'_1 + 2\sin^2 I \left(\delta'_8 + \delta'_9\right) + e \left(16\delta'_0 + 14\delta'_1 - 2\delta'_2\right) \cos l + e^2 \left(44\delta'_0 - 8\delta'_2 + 34\delta'_3\right) \cos 2l + \sin^2 I \left(\delta'_0 + 2\delta'_4 - 2\delta'_8 - 2\delta'_9\right) \cos(2l - 2w) \Bigg]. \tag{2.46}$$

Notemos que se o plano orbital de m coincide com Equador, $I = 0$, então $F_2(\mathbf{r}^*)$ se anula.

[2] A identificação é realizada após o cálculo de $\mathcal{U}_2$

2.1.2.3 Torque de maré e o Momento angular

Em 2.1.2.1 realizamos uma breve discussão sobre os atrasos de marés considerando os casos em que $\Omega \gg n$ e $\Omega \ll n$. O adiantamento/atraso do bojo de maré gera um torque em M retardando/alavancando sua rotação. Já no movimento orbital de m aparece um torque de mesma intensidade e direção, porém em sentido contrário. Dessa maneira, m varia sua distância orbital de M. Por definição, calculamos o torque em M utilizando

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{2.47}$$

onde $\mathbf{r}$ é distância entre M e m. A força é dada por $F = m\nabla U_{\text{lag}}$ [3].

Tomando novamente $\mathbf{r}^* = (r^*, \hat{\theta}^*, \hat{\phi}^*)$, de maneira que $\mathbf{r} = (r, 0, 0)$. Calculando o torque em coordenadas esféricas a partir da equação 2.47, temos

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = r\left(F_2\hat{\phi}^* - F_3\hat{\theta}^*\right), \tag{2.48}$$

onde τ_1 é o torque relacionado a componente $\mathbf{r}$, τ_2 o torque relacionado a $\hat{\theta}^*$ e τ_3 o torque relacionado a componente $\hat{\phi}^*$. Dessa forma, $\tau_1 = 0$, visto que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0$.

Decompondo τ em um sistema de coordenadas fixas (x, y, z), de acordo com a Figura 2.6, obtemos:

$$\tau_x = \tau_2 \cos\theta \cos\phi - \tau_3 \sin\phi, \tag{2.49}$$

$$\tau_y = \tau_2 \cos\theta \sin\phi + \tau_3 \cos\phi, \tag{2.50}$$

$$\tau_z = -\tau_2 \sin\phi. \tag{2.51}$$

Sabendo que τ_2 e τ_3 estão associados à F_2 e F_3, respectivamente. Substituindo então as equações (2.45), (2.46) e (2.48) em (2.49) e (2.50), chegamos em

$$< \tau_y >= \frac{-3k_d G m^2 R^5}{4a^6} \sin I \left(\delta_0' + \delta_8' - \delta_9'\right) \tag{2.52}$$

$$< \tau_z >= \frac{3k_d G m^2 R^5}{8a^6} \left(4\delta_0' + e^2\left(-20\delta_0' + 40\delta_1' + \delta_2'\right) + 2\sin^2 I\left(-2\delta_0' + \delta_8' + \delta_9'\right)\right). \tag{2.53}$$

As equações acima, assim como o potencial e a força, dependem das componentes referentes a δ', da inclinação e excentricidade. Se $I = 0$, $\tau_y = 0$ e τ_z se resume a segunda ordem de excentricidade.

[3] Se $\mathbf{r}^*$ for o vetor posição relativo ao centro de forças, então $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ e o torque é nulo.

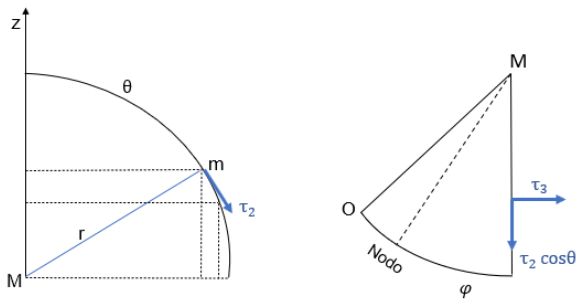


FIGURA 2.7. Ilustração das direções dos torques referentes à F_2 e F_3. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008)

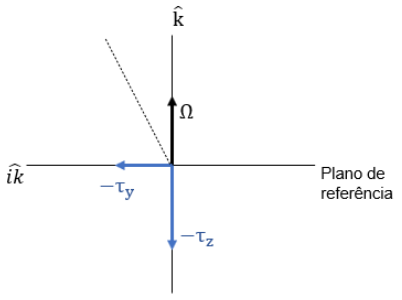


FIGURA 2.8. Componentes do torque nas direções $\hat{\mathbf{k}}$ e $i\hat{\mathbf{k}}$. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008)

Podemos definir τ em relação ao momento angular L, portanto

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \tag{2.54}$$

onde $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. De maneira que o momento angular total, $\mathbf{L}_{\text{tot}}$, do sistema deve ser conservado. Logo, à medida que a velocidade, $\mathbf{v}$, aumenta, a distância $\mathbf{r}$ necessariamente precisa diminuir.

Definindo o momento angular total como

$$\mathbf{L}_{\text{tot}} = \mathbf{L}_{\text{orb}} + \mathbf{L}_{\text{rot}}, \tag{2.55}$$

onde $\mathbf{L}_{\text{orb}}$ e $\mathbf{L}_{\text{rot}}$ é o momento angular orbital e o momento angular rotacional de M, respectivamente. Visto que $\mathbf{L}_{\text{tot}}$ se conserva, então $\mathbf{L}_{\text{orb}} = -\mathbf{L}_{\text{rot}}$ e consequentemente, $\tau_{\text{orb}} = -\tau_{\text{rot}}$. Além disso, podemos escrever o momento angular em função do momento de inércia de M. Tomando então

$$\mathbf{L}_{\text{rot}} = Mv\hat{\mathbf{k}} = Mr^2\Omega\hat{\mathbf{k}} = I_c\Omega\hat{\mathbf{k}} \tag{2.56}$$

do vetor, de maneira que a velocidade angular é dada por $r\Omega\hat{\mathbf{k}}$, I_c é o momento de inércia de M e $\hat{\mathbf{k}}$ é um vetor unitário.

Calculando a derivada da velocidade de rotação Ω a partir de

$$\frac{d\Omega}{dt}\hat{\mathbf{k}} = \dot{\Omega}\hat{\mathbf{k}} + \Omega\dot{J}i\hat{\mathbf{k}}, \tag{2.57}$$

de modo que J é definido como a variação da inclinação devido à variação vetor $\hat{\mathbf{k}}$ (Ferraz-Mello et al., 2008). A partir da equação (2.57) obtemos $I\Omega\hat{\mathbf{k}} = -\tau_z$ e $\Omega\dot{J} = -\tau_y$. Assim, o valor médio de $\dot{\Omega}$ é dado pela seguinte equação

$$< \dot{\Omega} >= \frac{3k_d G m^2 R^5}{8Ia^6}\left(4\delta_0' + e^2\left(-20\delta_0' + 49\delta_1' + \delta_2' +\right) + 2\sin^2 I\left(-2\delta_0' + \delta_8' + \delta_9'\right)\right). \tag{2.58}$$

2.1.2.4 Dissipação de energia

Como foi mencionado anteriormente, a viscosidade do corpo acaba gerando fricções dissipando assim sua energia interna. As fricções, são oscilações devido ao processo de deformação e relaxamento que o corpo realiza ao sofrer ação da força de maré pelo corpo companheiro. Esse comportamento de deformar e relaxar retira energia de rotação do corpo e produz calor. Para compreender melhor como a energia é dissipada introduziremos o conceito de Trabalho de uma força.

O trabalho de uma força, W, é comumente definido como o produto da força pelo deslocamento. O análogo da força para o caso de um corpo em rotação é dado por

$$W_{\text{rot}} = \tau\Omega \tag{2.59}$$

e $< \dot{W} >= I\Omega < \dot{\Omega} >$. Substituindo a equação 2.58 na expressão anterior encontramos

$$< \dot{W}_{\text{rot}} >= \frac{-3k_d G m^2 R^5}{8a^6}\left(4\delta_0' + e^2\left(-20\delta_0' + 49\delta_1' + \delta_2'\right) + 2\sin^2 I\left(-2\delta_0' + \delta_8' + \delta_9'\right)\right). \tag{2.60}$$

Considerando o caso em que $\Omega \gg n$, E_{rot} é transferida de M para o movimento orbital de m. Isso porque M tem seu movimento rotacional freado por m devido ao torque por conta do atraso de maré.

Para o cálculo do trabalho devido à força de maré tomaremos sua definição base, onde

$$\dot{W}_m = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \tag{2.61}$$

de modo que a força pode ser calculada através da equação 2.54 e $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade, dado pelas componentes radial e transversal. A partir da Figura 2.9 observamos que a componente transversal,v_t, deve ser decomposta. Logo, fazendo a decomposição em

coordenadas esféricas temos: $v_2 = -v_t \sin\sigma$ e $v_3 = v_t \cos\sigma$– referentes à θ e ϕ, respectivamente. Através da lei dos cossenos e da lei dos senos no triângulo inferior, obtemos: $\cos\sigma = \sin\phi / \sin(f + w)$ e $\sin\sigma = \sin I \cos\phi$. Desse modo, a equação 2.61 nos fornece

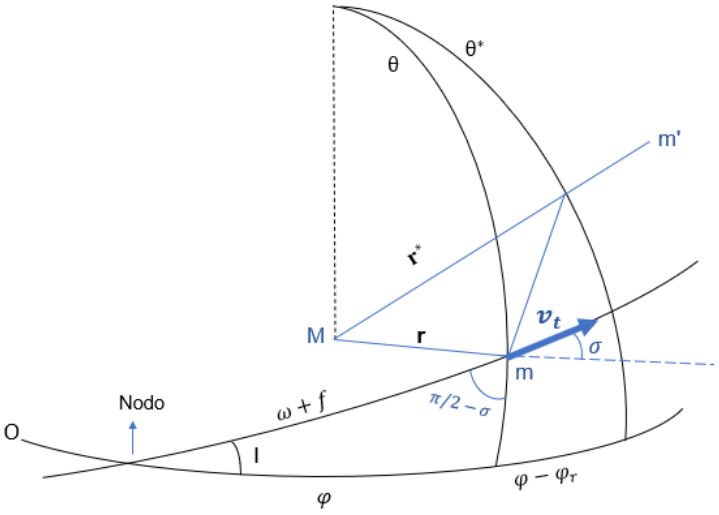


FIGURA 2.9. Componente transversal v_t no plano orbital de m. Imagem adaptada de Ferraz-Mello et al. (2008)

$$< \dot{W}_{\rm m} >= \frac{3k_d G m^2 R^5}{8a^6}\left(4\delta_0' + e^2\left(-20\delta_0' + \frac{147}{2}\delta_1' + \frac{1}{2}\delta_2' - 3\delta' 5\right) - 4\sin^2 I\left(\delta_0' + \delta_8'\right)\right). \tag{2.62}$$

Ferraz-Mello et al. (2008) mostraram que para o caso em que o planeta apresenta movimento rotacional superior ao movimento orbital do satélite, são feitas algumas aproximações em relação às componentes de δ_j'. Assumimos o quase sincronismo ou sincronismo entre o planeta e o satélite, além de tomar que $< \dot{\Omega} >\simeq 0$. Supomos que $\delta_2 \simeq -\delta_1' \simeq \delta_8' \simeq -\delta_9'$. Além disso, se o torque que atua no corpo com rotação quase nula for o torque de maré, então $\delta_0' = 12e^2\delta_2'$. Substituindo todas as aproximações citadas na equação 2.62, encontramos

$$< \dot{W}_{\rm m} >= \frac{-3k_d G m^2 R^5}{2a^6}\left(7e^2 + \sin^2 I\right)\delta_2'. \tag{2.63}$$

e

$$W_{\rm tot} =< \dot{E}_{\rm orb} >, \tag{2.64}$$

isso porque $< \dot{E}_{\rm rot} >= 0$. Portanto, podemos concluir que $W_{\rm tot}$ está associado à energia transferida de M para m devido a força de maré ao longo do eixo que liga seus centros de massa.

Um parâmetro importante na dissipação de energia é o fator dissipativo[4] Q. Podemos defini-lo como a razão entre a energia potencial gravitacional acumulada pelo bojo de maré (E_0) e a quantidade de energia dissipada ao formar este bojo (ΔE). Logo,

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E}. \tag{2.65}$$

Chamamos de Q_i o valor de Q associado a cada frequência de oscilação ν_i. Consequentemente, é possível relacionar Q_i com os ângulos de atraso δ_i, visto que ambos dependem da frequência de oscilação devido à maré. Temos então,

$$Q_i = \frac{1}{\delta_i}. \tag{2.66}$$

Observamos que cada oscilação dependerá de um fator Q diferente, pois um corpo pode apresentar várias oscilações sobrepostas. Mesmo que $\delta_i \to 0$, nem toda equação se anulará. Entretanto, para o caso em que há sincronismo teremos que $Q \to \infty$. Isso porque, se um corpo está em sincronismo, significa que a dissipação de energia é nula.

2.1.2.5 Variações dos elementos orbitais

Tomando a equação para o cálculo da energia orbital dada por:

$$E_{\text{orb}} = \frac{GmM}{2a}, \tag{2.67}$$

temos que a é o semi-eixo maior e fornece a distância entre M e m. Da 3ª lei de Kepler, temos que

$$F_g = F_{\text{cen}}, \tag{2.68}$$

$$\frac{GMm}{a^2} = \frac{mn^2}{a}, \tag{2.69}$$

$$n = a^{-3/2}\mu, , \tag{2.70}$$

onde $\mu = GmM$. Para a média, encontramos que $< \dot{n} >= -3/2a \langle \dot{a} \rangle$. Isolando a na equação 2.67 e substituindo em $< \dot{n} >$, encontramos

$$< \dot{n} >= \frac{-3}{2a} < \dot{a} >= \frac{-9n^2 k_d m R^5}{8Ma^5} \left(4\delta_0' - e^2 \left(20\delta_0' - \frac{147}{2}\delta_1' + \frac{1}{2}\delta_2' + 3\delta_5' \right) - \sin^2 I \left(\delta_0' - \delta_8' \right) \right) \tag{2.71}$$

[4]No caso do oscilador harmônico, o fator Q mede a "quantidade" de amortecimento. Quanto maior for o valor de Q, menor será o amortecimento.

A 2ª lei de Kepler nos fornece:

$$|L| = na^2(1-e^2)^{1/2}. \tag{2.72}$$

Isolando na^2 em 2.72 e substituindo na 3ª lei de Kepler, encontramos

$$|L| = \frac{GmM}{na}(1-e^2)^{1/2}, \tag{2.73}$$

onde e é a excentricidade da órbita de m.

Consideramos que $\mathbf{L} = |\mathbf{L}|\hat{\mathbf{u}}$, onde $\hat{\mathbf{u}}$ é um vetor unitário na direção de $\mathbf{L}$. Utilizando a equação 2.54 tomando τ decomposto em relação às direções $\hat{\mathbf{u}}$ e $i\hat{\mathbf{u}}$, de modo que $\tau_\perp = \tau_z \cos I - \tau_y \sin I$ e $\tau_{||} = -\tau_z \sin I - \tau_y \cos I$, temos:

$$< \dot{e} >= \frac{-3ek_d mR^5}{8Ma^5}\left(2\delta_0' - \frac{49}{2}\delta_1' + \frac{1}{2}\delta_5'\right). \tag{2.74}$$

Iremos considerar as médias das taxas de variação temporal para o caso em que $\Omega >> n$[5]. Tomando novamente as aproximações para o ângulo de atraso, $\delta_2 \simeq -\delta_1' \simeq \delta_8' \simeq -\delta_9'$, e substituindo nas equações 2.70 e 2.74, chegamos em

$$< \dot{n} >= \frac{-3}{2a} < \dot{a} >= \frac{-9n^2 k_d mR^5}{2Ma^5}\left(\delta_0' + e^2\left(\frac{27}{2}\delta_0' - \frac{3}{4}\delta_5'\right) - \sin^2 I\left(\delta_0' - \delta_8'\right)\right) \tag{2.75}$$

$$< \dot{e} >= \frac{3mnek_d R^5}{8Ma^5}\left(22\delta_0' - 3\delta_5'\right). \tag{2.76}$$

Desprezando os termos de segunda ordem associados à inclinação e tomando $\delta_0 \simeq \delta'_3 \simeq \delta'_5 \simeq \delta'_8$, chegamos ao resultado mais comum na literatura para as taxas de variação temporal do movimento médio, semi-eixo maior e excentricidade:

$$< \dot{n} >= \frac{-3}{2a} < \dot{a} >= \frac{-9n^2 k_2 mR^5}{2MQa^5}\left(1 + \frac{57}{4}e^2\right), \tag{2.77}$$

$$< \dot{e} >= \frac{57mnek_2 R^5}{8MQa^5}, \tag{2.78}$$

onde M é a massa do planeta, m a massa do satélite e a razão dissipativa é dada por k_2/Q, onde k_2 é o *Love number* associado à deformação atrelada ao potencial gravitacional.

Observamos que quanto maior for o valor do fator dissipativo Q, menor será o valor da razão k_2/Q e das derivadas $< \dot{n} >$, $< \dot{a} >$ e $< \dot{e} >$. Reescrevendo a equação

[5]Para o sistema Saturno-Mimas, temos $\Omega_{\text{Sat}} = 10{,}7$ h e $n_{\text{Mim}} \simeq 22{,}617$ h

2.64 no mesmo formato de 2.77 e 2.78, obtemos:

$$< \dot{E} >= \frac{-21k_2Gm^2R^5e^2}{2Qa^6} \tag{2.79}$$

Notemos, então, que $< \dot{E}_{\text{orb}} >$ também diminui com o aumento de Q. Ao contrário, valores baixos do fator Q geram alta dissipação e uma maior variação do semi-eixo e excentricidade.

2.2 Modelo de fluência (*creep*)

Na seção anterior analisamos os efeitos de deformação e dissipação devido à maré através do modelo de Darwin. Nesta seção nosso objetivo é apresentar de maneira breve um modelo distinto, porém comparável, ao modelo de Darwin. Um de nossos focos principais é estudar a migração de Mimas. Em relação à migração aplicaremos somente o modelo de Darwin. Explicaremos o porquê do uso deste modelo no capítulo 4. Sendo assim, não iremos nos aprofundar muito, entretanto discutiremos algumas equações e tópicos.

A principal diferença entre o modelo clássico e o modelo de fluência é a utilização explícita da viscosidade. Aqui, não utilizaremos as componentes do ângulo de atraso δ'_j. A ideia é abrangir não somente corpos fluidos, mas também corpos rígidos.

Considerando novamente um sistema planeta-satélite de massas M e m, respectivamente. A Figura 2.10 apresenta a superfície de M, dada pela função $\xi(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, t)$, onde ξ é a distância do centro de gravidade do corpo até os pontos da superfície em um instante t. Os parâmetros $\hat{\varphi}$ e $\hat{\theta}$ são a longitude e co-latitude. Como a deformação em M é devida somente à maré gerada por m, a figura de equilíbrio é um elipsoide prolato, conhecido como elipsoide de *Jeans* (Folonier et al., 2022). A função $\rho(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, t)$ determina a superfície da figura de equilíbrio.

A equação da lei de fluência é dada por:[6]

$$\dot{\xi} = \gamma(\rho - \xi). \tag{2.80}$$

Notemos que a resposta de M, dada por $\dot{\xi}$, devido a ação da maré é dada pela separação entre a superfície do próprio corpo e sua superfície deformada. O parâmetro

[6] A equação de fluência é obtida através da integração de aproximação esférica da equação de *Navier Stokes* (Landau & Lifshitz, 2013).

γ é o fator de relaxação, definido como

$$\gamma = \frac{3gM}{8\pi R^2 \eta}, \tag{2.81}$$

onde g é a aceleração gravitacional, R e η são o raio e a viscosidade de M, respectivamente. Para corpos fluidos perfeitos, $\eta \to 0$ e $\gamma \to \infty$. Caso o corpo seja sólido, $\eta \to \infty$ e $\gamma \to 0$.

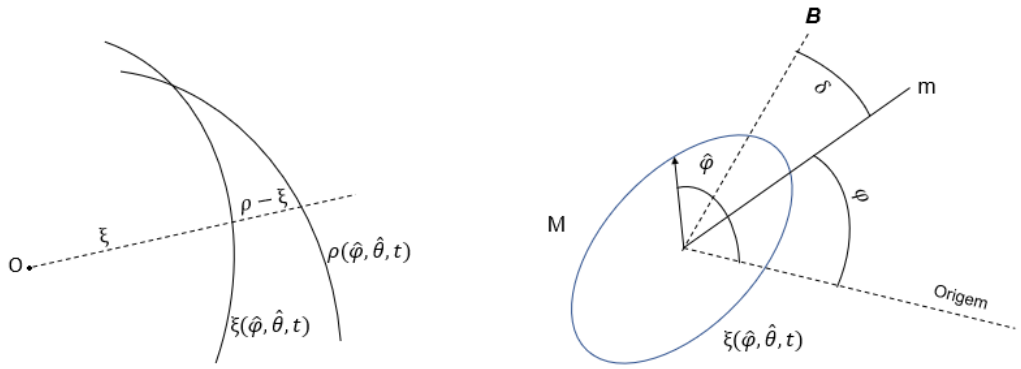


FIGURA 2.10. À esquerda temos a superfície do corpo em equilíbrio, ρ, e a superfície do corpo deformado, ξ. Os ângulos $\hat{\varphi}$ e $\hat{\theta}$ são a longitude e co-latitude de M. À direita mostramos o corpo M perturbado por m, onde δ é o ângulo de atraso. Imagens adaptadas de (Ferraz-Mello, 2013)

.

A deformação sofrida por M (achatamento e alongamento) são dadas pelas respectivas equações:

$$\epsilon_\rho = \frac{15}{4}\frac{M}{m}\left(\frac{R}{r}\right)^3, \tag{2.82}$$

$$\epsilon_z = \frac{\epsilon_\rho}{2} + \frac{5\Omega^2 R^3}{4GM}, \tag{2.83}$$

onde R é o raio de M, r a distância entre os dois corpos, Ω é a velocidade de rotação de M e G a constante gravitacional.

As equações que definem um elipsoide em equilíbrio (estático) e em um dado instante t (dinâmico) são dadas por:

$$\rho(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, t) = R\left(1 + \frac{\epsilon_\rho}{2}\sin^2\hat{\theta}\cos\left(2\hat{\varphi} - 2\phi\right) + \epsilon_z\left(\frac{1}{3} - \cos^2\hat{\theta}\right)\right), \tag{2.84}$$

$$\xi(\hat{\theta}, \hat{\varphi}, t) = R\left(1 + \frac{\varepsilon_\rho}{2}\sin^2\hat{\theta}\cos\left(2\hat{\varphi} - 2\varphi_{\boldsymbol{B}}\right) + \varepsilon_z(\frac{1}{3} - \cos^2\hat{\theta})\right), \tag{2.85}$$

onde ε_ρ e ε_z são os achatamentos instantâneos. O ângulo de orientação do bojo de maré é $\phi_{\boldsymbol{B}} = \phi + \delta$. Derivando a equação 2.85 e inserindo em 2.80 encontramos:

$$\dot{\delta} = \Omega - \dot{\varphi} - \frac{\gamma\epsilon_\rho}{2\varepsilon_\rho}\sin 2\delta, \tag{2.86}$$

$$\dot{\varepsilon}_\rho = \gamma\left(\epsilon\rho\cos 2\delta - \varepsilon_\rho\right), \tag{2.87}$$

$$\dot{\varepsilon}_z = \gamma\left(\epsilon_z - \varepsilon_z\right). \tag{2.88}$$

As equações 2.86, 2.87 e 2.88 formam um sistema de equações, o qual nos fornece o cálculo dos achatamentos e do ângulo de orientação do bojo de maré. Fizemos uma analogia com o oscilador harmônico amortecido na subseção 2.1.2, onde o parâmetro de amortecimento era a viscosidade. O ângulo de atraso ocorria justamente por considerar a velocidade de rotação do corpo, Ω. Portanto, seguindo a analogia clássica, a variação temporal do ângulo δ depende da velocidade de rotação de M e de sua viscosidade.

2.2.0.1 Potencial e Força

Tomando o potencial perturbador em um ponto $\mathbf{r} \equiv (r, \theta, \phi)$, análogo a equação 2.27, temos

$$\delta U(\mathbf{r}) = -\frac{G}{2r^3}\left[(B-A)\left(3\cos^2\Psi_{\boldsymbol{B}} - 1\right) - (C-B)\right], \tag{2.89}$$

onde $\Psi_{\boldsymbol{B}}$ é o ângulo entre a direção do ponto onde o potencial é obtido e $\mathbf{B}$ é a direção do vértice do bojo (ver Figura 2.9). A constante gravitacional é dada por G e A, B e C são os momentos principais de inércia, já mencionados anteriormente. O $\cos\Psi_{\mathbf{B}}$, $B-A$ e $C-A$ podem ser escritos da seguinte maneira:

$$cos\Psi_B = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{r}_{\mathbf{B}} = r\cos\left(\varphi_B - \varphi\right) = r\cos\delta, \tag{2.90}$$

$$B - A \approx C\varepsilon_\rho, \tag{2.91}$$

$$C - B \approx C\left(\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_\rho}{2}\right), \tag{2.92}$$

sendo $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{r}_{\mathbf{B}}$ vetores unitários. Substituindo as equações acima em 2.89, encontramos

$$\delta U(\mathbf{r}) = -\frac{GC\varepsilon_\rho}{4r^3}\cos 2\delta - \frac{GC\varepsilon_z}{2r^3}. \tag{2.93}$$

Seguindo Ferraz-Mello et al. (2020) e Folonier & Ferraz-Mello (2017) consideraremos uma única notação para o vetor $\mathbf{r}$ neste modelo. Visto que o vetor é substituído por ε_ρ e ε_z nas equações.

Para calcular a força de maré em uma massa m localizada em um ponto arbitrário P no espaço, temos[7].

$$\mathbf{F} = -m\nabla_{\mathbf{r}}\delta U. \tag{2.94}$$

[7] Da 3ª lei de *Newton*, $\mathbf{F}_m = -\mathbf{F}_M$

Considerando a equação 2.94 e escrevendo novamente a força em componentes, de maneira que[8]

$$F_1 = -m\frac{\partial \delta U}{\partial r} = -\frac{3Gm(B-A)}{2r^4}\left(3\cos^2\delta - 1\right) - \frac{3Gm(C-A)}{2r^4}, \tag{2.95}$$

$$F_3 = -m\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \delta U}{\partial \varphi} = -\frac{3Gm(C-A)}{2r^4}\sin 2\delta. \tag{2.96}$$

Notemos que as componentes da força dependem apenas dos momentos de inércia do corpo e do ângulo entre m e a direção do bojo.

2.2.0.2 Rotação e Torque

Sabendo que o torque é definido como $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Tomando as componentes da força, F_1 e F_3 e substituindo na definição de torque, encontramos:

$$\boldsymbol{\tau} = rF_3\mathbf{k} = \frac{3Gm(B-A)}{2r^3}\sin 2\delta\mathbf{k}. \tag{2.97}$$

O torque τ também pode ser descrito como o produto da derivada temporal do momento angular pela velocidade do corpo. Além disso,

$$\mathbf{L} = I\Omega\mathbf{k}. \tag{2.98}$$

Portanto,

$$\dot{\Omega} = \frac{\tau_z}{C}, \tag{2.99}$$

onde o momento de inércia $C = \dfrac{2mR^2}{5}\left(1 + \dfrac{2\varepsilon_z}{3} + \vartheta(\varepsilon^2)\right)$ (Beutler, 2005). Então,

$$\dot{\Omega} = -\frac{3Gm\varepsilon_\rho}{2r^3}\sin 2\delta. \tag{2.100}$$

Notemos que a variação da rotação está associada ao achatamento que o corpo sofre. Para o caso estacionário, $\dot{\Omega} = 0$ e o torque se resume a $\tau = \dot{C}\Omega\mathbf{k}$.

2.2.0.3 Dissipação de energia

Nesta seção iremos analisar a energia dissipada pelo corpo M. Se tomamos m como uma massa pontual, então a energia dissipada por maré em M está relacionada com a variação de sua rotação (torque, ângulo de atraso, etc.) e da variação do semi-eixo

[8] A componente F_2 é zero, pois consideramos somente o caso que a órbita é plana.

maior de m. Consideraremos a deformação de M devido a massa m e suas perturbações orbitais devido ao potencial deformador de M. A energia interna de M e suas derivadas são descritas por (Essen, 2004; Folonier & Ferraz-Mello, 2017)

$$E_{\text{int}} = -\frac{3GM^2}{5R}\left(1 - \frac{{\varepsilon^2}_\rho}{15} - \frac{4}{45}{\varepsilon^2}_z\right) \tag{2.101}$$

$$= \frac{2GM^2}{25R}\left(\varepsilon_\rho\dot{\varepsilon}_\rho + \frac{4}{3}\varepsilon_z\dot{\varepsilon}_z\right). \tag{2.102}$$

A derivada temporal da energia orbital é calculada através de

$$\dot{E}_{\text{orb}} = m\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}\dot{\lambda}_i, \tag{2.103}$$

onde $\lambda_i = \lambda_i(\varepsilon_\rho, \varepsilon_z, \varphi_{\boldsymbol{B}})$. Logo,

$$\dot{E}_{\text{orb}} = \frac{-GCm}{4r^2}\left(\dot{\varepsilon}_\rho\cos 2\delta - 2\varepsilon_\rho(\dot{\delta} + \dot{\varphi})\sin\delta + \frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_z\right) \tag{2.104}$$

.

Como mencionamos, a rotação de M está relacionada com a dissipação de energia. A energia rotacional é $E_{\text{rot}} = C\Omega^2/2$, logo sua derivada depende de $\dot{\Omega}$. Assim, encontramos

$$\dot{E}_{\text{rot}} = -\frac{3GCm\Omega}{2r^3}\varepsilon_\rho\sin 2\delta + \frac{2C\dot{\varepsilon}_z\Omega^2}{3}. \tag{2.105}$$

E sabendo que $\dot{E}_{\text{tot}} = \dot{E}_{\text{int}} + \dot{E}_{\text{orb}} + \dot{E}_{\text{rot}}$, temos finalmente a variação temporal da energia mecânica do sistema. Logo,

$$\dot{E}_{\text{tot}} = -\frac{3GCm\gamma\epsilon_\rho}{4r^3}\sin^2\delta - \frac{2GM^2}{25\gamma R}\left({\dot{\varepsilon}^2}_\rho + \frac{4{\dot{\varepsilon}^2}_z}{3}\right). \tag{2.106}$$

De fato, a variação temporal da energia mecânica do sistema é sempre negativa. Ferraz-Mello et al. (2020) e Folonier & Ferraz-Mello (2017) discutem a variação temporal da energia mecânica para o caso de sincronismo\quase sincronismo. A $\dot{E}_{\text{tot}}$ para o caso síncrono é dada por

$$\dot{E}_{\text{sín}} = -\frac{21GCMe^2}{2a^3}\,\overline{\epsilon}_\rho\frac{n^2\gamma}{\gamma^2 + n^2}. \tag{2.107}$$

Substituindo o momento de inércia C, encontramos:

$$\dot{E}_{\text{sín}} = -\frac{21GMmR^2e^2}{5a^3}\,\overline{\epsilon}_\rho\frac{n^2\gamma}{\gamma^2 + n^2}. \tag{2.108}$$

Foram descartados os termos $\vartheta(\varepsilon^2)$. Notemos que a energia é sempre perdida e está associada à viscosidade do corpo. Caso $\gamma \gg n$, a segunda fração se resume a n/γ e $\dot{E}_{\text{sín}}$ é

inversamente proporcional a γ, porém diretamente proporcional à viscosidade ($\gamma \sim 1/\eta$). Ou seja, quanto maior for a viscosidade do corpo, maior será a quantidade de energia dissipada. Se $\gamma \ll n$, então a segunda fração se resume a γ/n. A $\dot{E}_{\text{sín}}$ é inversamente proporcional a n e diretamente proporcional à γ. Logo, quanto maior for a viscosidade, menor será a quantidade de energia dissipada. A partir disso, temos dois casos: um que a variação temporal da energia é proporcional à η e o outro em que a variação temporal da energia é inversamente proporcional à viscosidade, η. Graficamente encontraremos uma curva no formato de um V invertido, onde o pico será o valor máximo de energia dissipada em relação à η, por exemplo. Outro resultado importante é que se o valor de γ é alto, então o corpo possui uma baixa viscosidade, caracterizando corpos fluidos. O inverso, γ possuindo um valor baixo, resulta em corpos com alta viscosidade como é o caso do nosso planeta, por exemplo. Notemos que essa análise em relação à dissipação pode ser associada ao fator dissipativo Q do modelo clássico. O modelo de fluência não abrange tal fator, mas consegue explicar de forma satisfatória a dissipação por maré em um sistema de dois corpos. Nos capítulos 4 e 5 discutiremos melhor a influência da viscosidade nas variações da energia, semi-eixo e excentricidade, quando aplicamos o modelo de fluência para a maré em Mimas.

2.2.1 Variações do semi-eixo maior e excentricidade

Considerando a 3ª lei de Kepler dada pela equação 2.79, para o caso de sincronismo, temos que (Ferraz-Mello et al., 2020; Folonier & Ferraz-Mello, 2017):

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{GmM}\dot{E}_{\text{sín}}. \tag{2.109}$$

Portanto,

$$\dot{a} = -\frac{42R_s^2\overline{\epsilon}_\rho e^2}{5a}\frac{n^2\gamma}{n^2+\gamma^2}. \tag{2.110}$$

Da a equação (2.73) podemos escrever a variação da excentricidade em termos do momento angular L, de maneira que

$$\dot{e} = \frac{1-e^2}{e}\left(\frac{\dot{a}}{2a} - \frac{\dot{L}}{L}\right). \tag{2.111}$$

Para o caso onde há sincronismo, temos:

$$\dot{e} = -\frac{21R^2\overline{\epsilon}_\rho e\left(1-e^2\right)}{5a^2}\frac{n^2\gamma}{n^2+\gamma^2}. \tag{2.112}$$

Observamos que a discussão aplicada à variação temporal da energia também é aplicada nas equações 2.110 e 2.112. Quando $\gamma \gg n$, a segunda fração se resume a n/γ e $\dot{a}$ e $\dot{e}$ são inversamente proporcionais a γ, porém diretamente proporcionais à viscosidade. Portanto, quanto maior for a viscosidade maior será a variação temporal do semi-eixo maior e da excentricidade. Caso $\gamma \ll n$, então a segunda fração se resume a γ/n. As variações temporais $\dot{a}$ e $\dot{e}$ são inversamente proporcionais à n e diretamente proporcional ao fator de relaxação, γ. Logo, quanto maior for a viscosidade, menor serão as variações temporais do semi-eixo maior e excentricidade. Nos capítulos 4 e 5 discutiremos com mais detalhes a influência de γ e η quando aplicarmos as equações 2.108, 2.110 e 2.112 na análise para a maré no satélite Mimas.

Capítulo 3

Objetivos

Tendo como finalidade investigar a evolução orbital de Mimas devido à dissipação por maré em Saturno, traçamos alguns objetivos iniciais ao longo da pesquisa. Inicialmente precisamos definir em qual corpo, em Saturno ou e Mimas, a maré domina a evolução orbital do satélite. Feito isso integramos as equações médias afim de se ter a evolução orbital de Mimas em $t = -10^9$ anos. Também analisamos a dissipação em cada camada de Saturno com o intuito de verificar em qual delas a dissipação por maré é dominante. Tomamos como referência os trabalhos de Remus et al. (2012, 2014), Lainey et al. (2017), Guenel et al. (2014), Alvarado-Montes & García-Carmona (2019) e Shoji & Hussmann (2017). Além disso, foi necessário realizar um estudo do espaço de parâmetros. Por conseguinte, variamos os principais parâmetros utilizados durante a pesquisa com o objetivo de concluir quais deles são fundamentais na evolução orbital de Mimas. Ademais, realizamos uma extensão da pesquisa a outros sete satélites de Saturno.

Capítulo 4

Dissipação por maré no sistema Saturno-Mimas

4.1 Integração das equações

Existem diferentes maneiras e programas computacionais para o estudo da evolução orbital de satélites. Neste trabalho optamos por utilizar o programa *Mathematica* para investigar a evolução orbital de Mimas.

O *Mathematica* é um *software* da empresa *Wolfram Research* criado há pouco mais de 30 anos com o propósito de facilitar cálculos matemáticos que podem servir de amparo para inúmeras áreas. O software divide-se em duas partes distintas: uma associada ao processamento dos cálculos, o *Kernel* (Wolfram, 1999); a outra à interface com o usuário, o *Front end*. A documentação é dada pelo *Wolfram Notebook Interface*, no qual é possível organizar os arquivos da maneira desejada. Além disso, a linguagem é extremamente intuitiva, sendo simples de escrever e de ler. São disponibilizadas inúmeras documentações de auxílio e códigos prontos, os quais basta apenas copiar e alterar o que for necessário através do *Wolfram Language & System*.

O *Mathematica* possui mais de 1000 comandos e 6000 funções que podem ser utilizadas na resolução de cálculos de equações diferenciais ordinárias e parciais, gráficos bidimensionais e tridimensionais, tratamento de dados, entre outros [1]. Atualmente ele está na versão 13.2 e contém mais de 40 novos recursos quando comparada com a versão anterior.

[1] *Wolfram Mathematica*

Tabela 4.1. Valores médios dos parâmetros referentes a Saturno. Valores dos parâmetros de Saturno retirados de Saturn Fact Sheet e de Mimas retirados de *JPL Solar System Dynamics*

Parâmetro	Saturno	Mimas
M (kg)	5,683 $\times 10^{26}$	3,75 $\times 10^{19}$
R (m)	60 268 $\times 10^{3}$	198,2 $\times 10^{3}$
ρ (kg/m^3)	619,795	1149,82
a (m)	-	186 000 $\times 10^{3}$
e	-	0,0221

Tabela 4.2. Valores médios das condições inciais das equações. Valores retirados de *JPL Solar System Dynamics*

Condições iniciais	Valor
n_0 (s^{-1})	0,0000767392
a_0 (m)	186 000 $\times 10^{3}$
e_0	0,0221

Durante todo o estudo utilizamos apenas esse software na versão 12.2 para todo e qualquer cálculo e\ou gráfico produzido, pois o programa conseguiu suprir todas as nossas necessidades.

Na seção 4.3 serão apresentadas as três equações com variáveis temporais a serem utilizadas. Para obter os resultados, basicamente, integra-se as equações ($\dot{n}(t), \dot{a}(t)$ e $\dot{e}(t)$) acopladamente, utilizando o código de integração numérica do programa, a fim de ser encontrar $a(t)$ e $e(t)$. A integração foi realizada utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. O método foi escolhido automaticamente pelo programa, entretanto é possível alterá-lo de acordo com os resultados que queira obter.

As unidades de todos os parâmetros foram inseridas de acordo com o Sistema internacional (SI), sendo alteradas de acordo com a necessidade dos nossos resultados. Os parâmetros de Saturno e Mimas e as condições iniciais são apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2, respectivamente.

4.2 Dissipação em planetas gigantes gasosos

A estrutura interna dos gigantes gasosos está relacionada com sua formação. Enquanto os planetas do Sistema Solar interno, os rochosos, formaram-se a partir da acresção de planetesimais constituídos por rochas e metais, os gigantes, no entanto, formaram-se em uma região mais externa do Sistema Solar, onde gelo e substâncias voláteis eram mais abundantes (Perryman, 2011). Ocasionalmente, eles ficaram tão massivos que acretaram parte do material do disco de gás em torno de si. Por conta disso, eles possuem temperaturas mais baixas do que os planetas internos e atmosferas

mais vastas. Este é o caso de Júpiter e Saturno, os dois gigantes gasosos do Sistema Solar, como mostra a Figura 4.1.

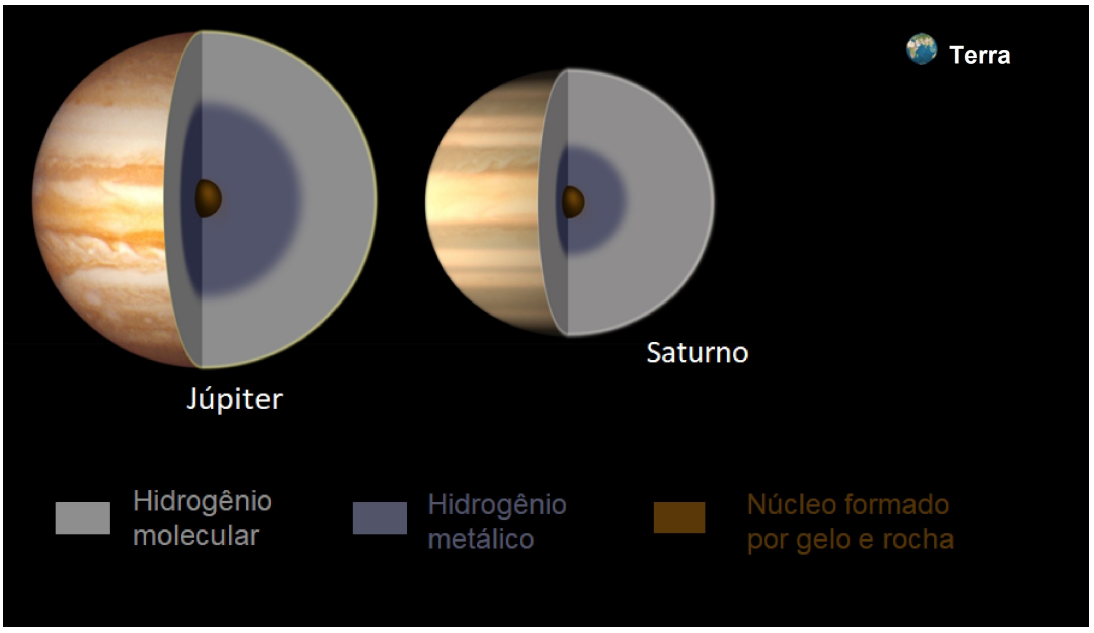


FIGURA 4.1. Ilustração da estrutura interna dos gigantes gasosos do Sistema Solar. Em suma, os planetas são formados por um núcleo denso composto de gelo e rocha, uma camada de hidrogênio metálico rodeada por uma camada de hidrogênio líquido e um envelope gasoso extenso. (Imagem adaptada de *Gas Giant Interiors: 2003—NASA*).

A dissipação por maré está intrinsecamente relacionada à estrutura interna dos corpos. Consequentemente precisamos levar em conta as propriedades de cada camada ao estudar a evolução dinâmica dos satélites dos planetas de gás, pois a dissipação, de fato, difere em cada parte do corpo.

Dermott (1979) analisou a influência do envelope gasoso na dissipação por maré do núcleo dos gigantes de gás. Ogilvie (2013) mostrou a dissipação devido à turbulência no envelope gasoso, assim como em Guenel et al. (2014). Trabalhos mais recentes (Fuller et al., 2016; Lainey et al., 2020) sugerem que o movimento do gás no envelope convectivo altera o modo de oscilação do planeta. Ou seja, a frequência com que esse corpo oscila devido à perturbações, no caso à maré. Remus et al. (2015) e Shoji & Hussmann (2017) investigaram os possíveis mecanismos atrelados à dissipação no núcleo de Saturno e como essa dissipação influencia a migração de Mimas.

Neste estudo consideramos um planeta de apenas duas camadas: um núcleo sólido rodeado por um envelope de gás, assim como em Remus et al. (2012, 2014), Ogilvie (2013), Alvarado-Montes & García-Carmona (2019), Shoji & Hussmann (2017) e Lainey et al. (2012).

4.2.1 Núcleo

Supomos que o núcleo do planeta seja formado de rocha/gelo com propriedades viscoelásticas, ou seja, um fluido não newtoniano que se comporta tanto como um sólido elástico, como um líquido viscoso (Merejolli, 2013).

Seguindo os trabalhos de Shoji & Hussmann (2017) e Remus et al. (2015) utilizamos o modelo de Maxwell no estudo da dissipação de maré no núcleo do planeta. O modelo descreve um oscilador harmônico amortecido, sendo o parâmetro de amortecimento a viscosidade. Como o núcleo se comporta como um sólido viscoelástico, sua viscosidade η_c amortece a ação da força de maré. A Figura 4.2 apresenta um exemplo de como funciona o modelo de Maxwell.

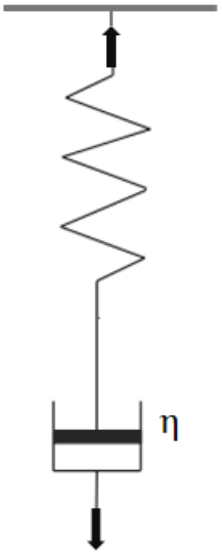


FIGURA 4.2. Ilustração do modelo de Maxwell. Ele é caracterizado por uma associação entre uma mola e um amortecedor de viscosidade η. Imagem adaptada de Navarro (2017).

Para analisar a dissipação no núcleo viscoelástico são consideradas as seguintes equações (Shoji & Hussmann, 2017). Devido ao atraso da resposta do núcleo à ação da força de maré por conta da fricção, o termo k_2 torna-se complexo (Remus et al., 2015). De maneira que

$$\widetilde{k_{2s}} = \frac{3}{2}\frac{\widetilde{\epsilon} + \frac{2}{3}\beta}{\alpha\,\widetilde{\epsilon} - \beta} \tag{4.1}$$

$$\alpha = 1 + \left(\frac{5}{2}\right)\left(\left(\frac{\rho_c}{\rho_0}\right) - 1\right)\left(\frac{R_c}{R_p}\right)^3 \tag{4.2}$$

$$\beta = \frac{3}{5}\left(\frac{R_c}{R_p}\right)^2 (\alpha - 1)\,, \tag{4.3}$$

$$\widetilde{\epsilon} = \frac{\frac{19\widetilde{\mu}_c}{2\rho_c g_c R_c} + \frac{\rho_0}{\rho_c}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right)\left(\beta + \frac{3}{2}\right) + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right)}{\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)\frac{\rho_0}{\rho_c}\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_c}\right)}, \tag{4.4}$$

sendo $Q = |\widetilde{k_{2s}}|/|\mathrm{Im}[\widetilde{k_{2s}}|$, $\mathrm{Im}[\widetilde{k_{2s}}] = k_{2s}/Q$, com $k_2 = \widetilde{k_{2s}}$. Os parâmetros g_c, R_c, ρ_c são a aceleração gravitacional na superfície do núcleo, o Raio do núcleo e sua densidade. ρ_0 é a densidade do envelope e as constantes α e β dependem dos parâmetros físicos do planeta. O complexo da frequência de Maxwell (Remus et al., 2012) é dado por

$$\widetilde{\mu}_c = \frac{\mathrm{w}_f \mu_c \eta_c}{\mathrm{w}_f \eta_c + i\mu_c}, \tag{4.5}$$

onde μ_c e η_c são a rigidez e viscosidade do núcleo e $\mathrm{w}_f = 2(\Omega - n)$ é a frequência associada à velocidade de rotação do planeta, Ω, e a velocidade angular média do satélite, n.

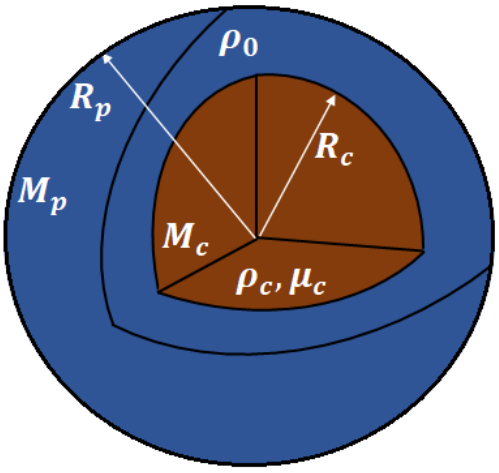


FIGURA 4.3. Ilustração de um planeta de duas camadas de massa e raio M_p e R_p, respectivamente. O núcleo viscoelástico de massa M_c, raio R_c, densidade ρ_c, viscosidade η_c e rigidez μ_c é cercado por um envelope fluido de densidade ρ_0. Imagem adaptada de Guenel et al. (2014).

A Tabela 4.3 apresenta os valores para os parâmetros do núcleo e do envelope de Saturno. Os demais parâmetros foram calculados.

Tabela 4.3. Valores dos parâmetros referentes ao núcleo e envelope de Saturno. A massa da Terra é dada por $M_t = 5,9736 \times 10^{24}$ kg. O valor de R_s pode ser encontrado na tabela 4.1. Valores retirados de Remus et al. (2014) e Shoji & Hussmann (2017).

Parâmetro	Valor
M_c (kg)	18,65 M_t
R_c (m)	0,219 R_s
ρ_c (kg/m^3)	11567,3
ρ_0 (kg/m^3)	503,587

4.2.2 Envelope de gás

Analisamos a dissipação por maré no envelope do planeta devido ao mecanismo conhecido como *resonance locking (RL)* proposto por Witte & Savonije (1999, 2001).

Planetas como Júpiter e Saturno apresentam um envelope convectivo, onde no fluido que encontra-se em oscilação, são geradas ondas inerciais (Greenspan et al., 1968). Essas ondas inerciais são consideradas atratores para a dissipação de energia por maré (Fuller et al., 2016). Se aproximarmos o nosso problema ao caso do oscilador harmônico forçado, a ressonância é dada pela razão entre a frequência de vibração forçada e a frequência de vibração livre. Portanto, o *RL* surge devido às frequências forçadas por conta das marés e as frequências de modo (i.e, modo de oscilação) associadas à dissipação por conta das ondas inerciais no envelope. A comensurabilidade entre essas frequências geram ressonâncias. À medida que a estrutura interna do planeta evolui, um satélite pode ficar preso próximo a uma dessas ressonâncias e migrar. Este é o mecanismo do *resonance locking.*

Witte & Savonije (1999) investigaram o fenômeno de *RL* em um sistema binário de estrelas concluindo que o mesmo é eficaz na circularização de órbitas de excentricidades altas. Em Witte & Savonije (2001) é utilizado o mecanismo de *RL* em ambas as estrelas analisando suas evoluções por maré. Fuller et al. (2016) propuseram que a rápida migração por maré de alguns satélites de Júpiter e Saturno é ocasionada pelo *RL*. Lainey et al. (2020) estudaram a rápida migração de alguns satélites (Mimas, Enceladus, Tethys, Dione e Rhea) de Saturno com o foco em Titan e o fator Q para Saturno associado a cada um dos satélites. Neste trabalho utilizaremos o *RL* para analisar a dissipação por maré no envelope gasoso do planeta utilizando os trabalhos de Fuller et al. (2016) e Lainey et al. (2020).

Aqui a razão dissipativa k_2/Q é dada por

$$\frac{k_2}{Q[t]} = \frac{B}{3}\frac{M_p^{1/2} a_0^{1/B}}{G^{1/2} M_s R_p^5 t_0} a[t]^{13/2+1/B}, \tag{4.6}$$

onde a_0 e t_0 são o semi-eixo maior atual do satélite e a idade do planeta, enquanto B é uma constante associada ao movimento do gás no envelope do planeta (Lainey et al., 2020).

4.3 Analisando as equações do sistema Saturno-Mimas.

No capitulo 2 foram apresentadas duas formulações matemáticas para descrever os efeitos de maré em um sistema planeta-satélite. Precisamos verificar onde (planeta ou satélite) a maré domina a evolução orbital do satélite Mimas. É valido mencionar que consideramos um sistema isolado, ou seja, descartamos qualquer perturbação devido a outros satélites e também aos anéis de Saturno

Utilizando as equações vistas nas subseções 2.1.2.5 e 2.2.1 são calculadas as seguintes razões

$$\frac{\dot{a}_{Mimas}}{\dot{a}_{Saturno}} \begin{cases} \dot{a}_{Mimas} = -\dfrac{42R_s^2\overline{\epsilon}_\rho e^2}{5a}\dfrac{n^2\gamma}{n^2+\gamma^2} \\ \dot{a}_{Saturno} = \dfrac{2a}{3n}\dfrac{9n^2M_mR_s^5}{2M_sa^5}\dfrac{k_2}{Q}\left(1+\dfrac{51}{4}e^2\right) \end{cases} \tag{4.7}$$

$$\frac{\dot{e}_{Mimas}}{\dot{e}_{Saturno}} \begin{cases} \dot{e}_{\text{Mimas}} = -\dfrac{21R_s^2\overline{\epsilon}_\rho e\left(1-e^2\right)}{5a^2}\dfrac{n^2\gamma}{n^2+\gamma^2} \\ \dot{e}_{\text{Saturno}} = \dfrac{57neM_mR_s^5}{8M_sa^5}\dfrac{k_2}{Q}. \end{cases} \tag{4.8}$$

Iremos nos basear nas conclusões de Remus et al. (2012, 2014) e Guenel et al. (2014), os quais apontam que a dissipação por maré no núcleo é dominante. Contudo no capítulo seguinte, mostramos que nossos resultados corroboram com as referências adotadas. Em vista disso, substituímos em $\dot{a}_{\text{Saturno}}$ e $\dot{e}_{\text{Saturno}}$ a razão dissipativa k_2/Q, dada pelo $\text{Im}[\widetilde{k_{2s}}]$. Sendo $\widetilde{k_{2s}}$ fornecido pela equação 4.1. Os valores dos parâmetros de Mimas e Saturno foram descritos na Tabela 4.1

A Figura 4.4 mostra a razão da taxa de variação temporal dos semi-eixos maiores de cada corpo. Nota-se que a curva tem um comportamento decrescente e, posteriormente, crescente, formando um um vale que corresponde a $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. Valores para a viscosidade do núcleo de Saturno no intervalo 10^{13} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{17}$ Pa s mostram que os efeitos de maré no planeta são mais significativos do que no satélite, pois neste intervalo $\dot{a}_{\text{Saturno}} \gg \dot{a}_{\text{Mimas}}$.

O comportamento da curva se mantém quando calculamos a razão das taxas de variações temporal das excentricidades, mostrada na Figura 4.5. Assim como para os

semi-eixos, o pico da curva corresponde a $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. Entretanto, quando realizamos a mesma análise na faixa de valores de η_c mencionada no parágrafo acima (i.e 10^{13} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{17}$ Pa s), a conclusão é de que a maré no satélite é quem domina a evolução da excentricidade do mesmo, uma vez que $\dot{e}_{\text{Saturno}} \ll \dot{e}_{\text{Mimas}}$.

Como mencionado acima, consideramos algumas conclusões da literatura. Para que essas conclusões sejam válidas em nosso trabalho, devemo considerar valores próximos a $\eta_c = 10^{15}$ Pa s. Em vista disso, obtemos que $\dot{a}_{\text{Saturno}} \gg \dot{a}_{\text{Mimas}}$ e $\dot{e}_{\text{Saturno}} \ll \dot{e}_{\text{Mimas}}$.

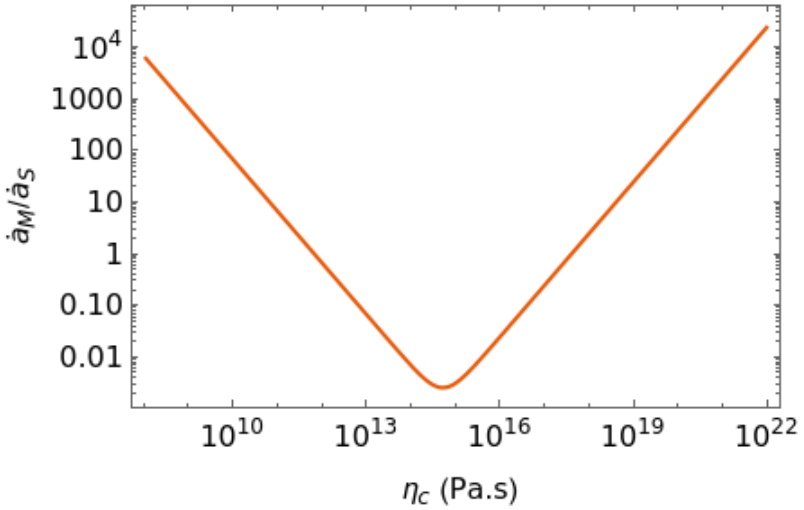


FIGURA 4.4. Razão de $\dot{a}_{\text{Mimas}}$ por $\dot{a}_{\text{Saturno}}$ em função viscosidade do núcleo de Saturno. Os valores apresentados no eixo vertical estão em módulo. Observamos que a maré em Saturno domina a migração de Mimas.

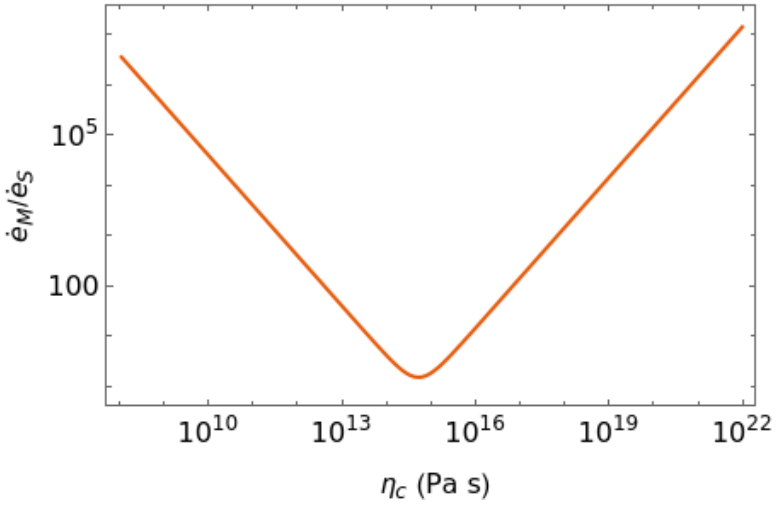


FIGURA 4.5. Razão de $\dot{e}_{\text{Mimas}}$ por $\dot{e}_{\text{Saturno}}$ em função viscosidade do núcleo de Saturno. Os valores apresentados no eixo vertical estão em módulo. Observamos que a maré em Mimas domina a evolução da excentricidade do satélite.

Em vista disso, são definidas as equações a serem manipuladas durante toda a análise posterior do estudo:

$$\dot{n} = -\frac{9n^2 M_m R_s^5}{2M_s a^5}\frac{k_2}{Q}\left(1 + \frac{51}{4}e^2\right) \tag{4.9}$$

$$\dot{a} = \frac{-2a\dot{n}}{3n} \tag{4.10}$$

$$\dot{e} = -\frac{21R_m^2\bar{\epsilon}_\rho e\left(1-e^2\right)}{5a^2}\frac{n^2\gamma}{n^2+\gamma^2} \tag{4.11}$$

4.4 Dissipação por maré em Saturno

Na seção 4.2 foram apresentados os dois modelos que usaremos para descrever a dissipação por maré em Saturno. Adotamos o modelo de Maxwell para o núcleo e o mecanismo de *Resonance Locking* para o envelope de gás. A Figura 4.6 exemplifica o sistema Saturno-Mimas.

Simplificamos nossa análise considerando que tanto o núcleo quanto o envelope de Saturno são estruturas homogêneas e que suas respectivas dimensões não são alteradas durante todo o tempo de integração. Além disso, consideramos que o mecanismo *RL* permanece ativo durante toda a evolução orbital de Mimas.

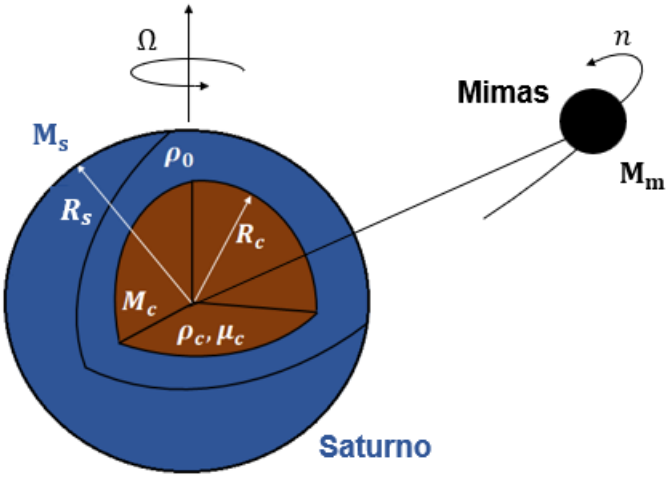


FIGURA 4.6. Saturno sendo representado como um planeta de duas camadas de massa M_s e raio R_s perturbado por Mimas, que pode ser considerado um ponto de massa M_m orbitando o planeta com um movimento médio n. O núcleo sólido de raio R_c, densidade ρ_c, viscosidade η_c e rigidez μ_c, é cercado por um envelope fluido de densidade ρ_0. Imagem adaptada de Guenel et al. (2014)

4.4.1 Dissipação por maré no núcleo

Tomando a equação 4.1 e substituindo nas equações 4.9, 4.10 e 4.11 com os devidos parâmetros e integrando acopladamente em $t = -5 \times 10^9$ anos (idade aproximada do Sistema Solar) encontramos a evolução orbital de Mimas devido à dissipação por maré

no núcleo de Saturno. Nesta seção consideramos somente a dissipação devido ao núcleo, portanto é descartada qualquer influência do envelope gasoso. Fixamos R_c =0,219 R_s e $\mu = 10^{11}$ Pa.

A Figura 4.7 mostra a variação do semi-eixo de Mimas para cinco valores de η_c. Nota-se que a órbita de Mimas se expande de acordo com o tempo. Para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e $\eta_c = 10^{15}$ Pa s, Mimas migra em uma escala de tempo menor do que para os demais valores de viscosidade. Em cerca de -10^9 anos para $\eta_c = 10^{15}$ Pa s e -2×10^9 para $\eta_c = 10^{14}$, Mimas cessa sua migração. Isso ocorre pelo fato de Mimas e Saturno estarem em movimento síncrono, logo a frequência w_f encontrada na equação 4.5 se anula e $\mathrm{Im}[k_{2s}] = 0$. Portanto, não há dissipação. Os dois valores extremos de viscosidade, $\eta_c = 5 \times 10^{13}$ Pa s e $\eta_c = 10^{17}$ Pa s, não alteram significativamente o semi-eixo do satélite na escala de tempo apresentada. No entanto, é descartada a hipótese de considerar um tempo de integração maior para estes valores, pois é estimado que o tempo de formação de Saturno seja de aproximadamente $4{,}2 \times 10^9$ anos (Lainey et al., 2020).

Dessa forma, adotamos $\eta = 10^{14}$ Pa s como um valor usual para a viscosidade do núcleo de acordo com os modelos de formação e evolução de Mimas (Meyer & Wisdom, 2008; Shoji & Hussmann, 2017).

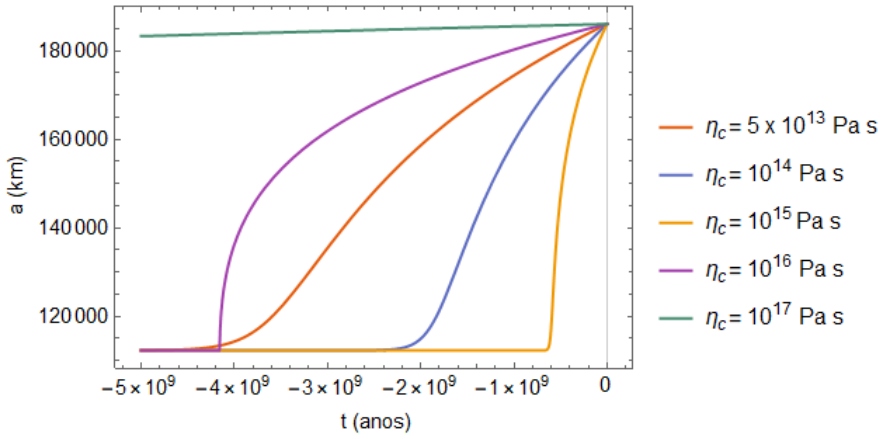


FIGURA 4.7. Variação do semi-eixo de Mimas pelo tempo comparando o valor de $\eta_c = 5 \times 10^{13}$ Pa s utilizado por Shoji & Hussmann (2017) com outros quatro valores. Substituímos a equação 4.1 em 4.9, 4.10 e 4.11. Imagem adaptada de Shoji & Hussmann (2017).

Inserindo a equação 4.1 nas equações 2.77, 2.78 e 2.79 obtemos os gráficos apresentados na Figura 4.8. Ou seja, utilizamos somente as equações do modelo clássico, logo estamos considerando, aqui, somente a maré no planeta. Os gráficos apresentam uma faixa de valores para η de forma que 10^{12} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{20}$ Pa s. Notemos que o pico dos três gráficos estão próximos à η_c. A imagem **a)** mostra a taxa de variação do semi-eixo de Mimas pela viscosidade do núcleo de Saturno. Corroborando com a Figura 4.7, a variação máxima do semi-eixo ocorre quando $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s, indicada pela reta

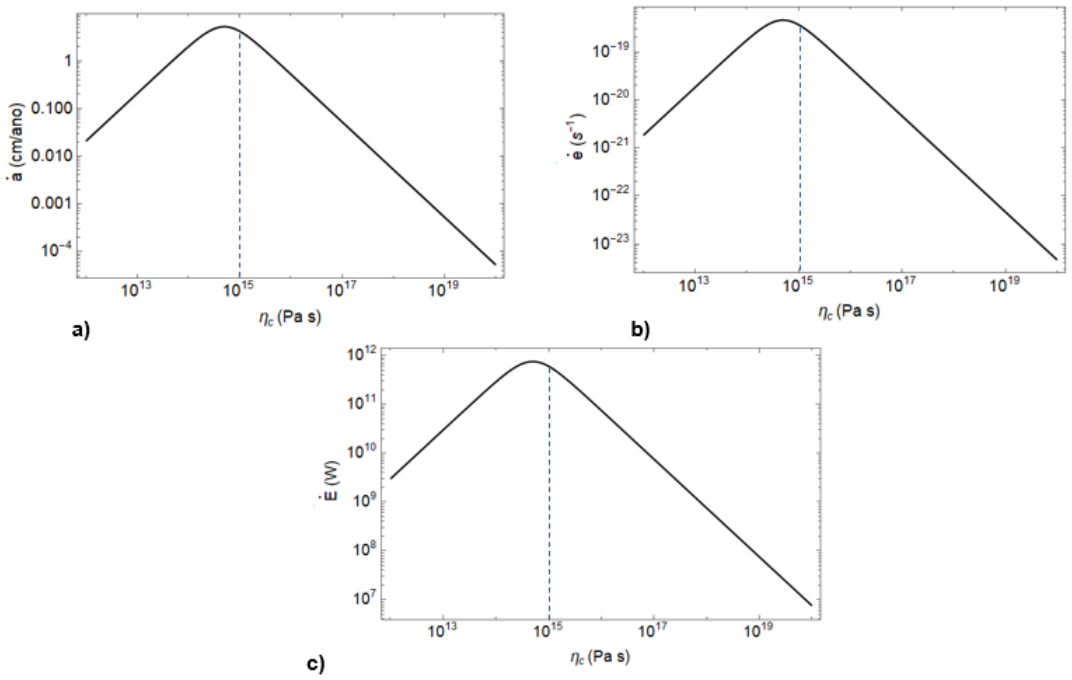


FIGURA 4.8. Taxa de variação pela viscosidade do núcleo de Saturno do **a)** semi-eixo maior de Mimas, **b)** da excentricidade e da **c)** energia dissipada. Em todos os gráficos o pico está atribuído a um valor de viscosidade próximo de 10^{15} Pa s. Utilizamos as equações 2.77, 2.78 e 2.79, onde a razão k_2/Q é dada pela equação 4.1.

tracejada. Essa observação é estendida à $\dot{e}$ e $\dot{E}$. Notemos que os gráficos apresentam o mesmo comportamento de inversão de proporcionalidade dependendo da viscosidade atribuída ao núcleo do planeta. Diretamente proporcional quando o núcleo se comporta como um corpo fluido e inversamente proporcional quando o núcleo de Saturno se comporta como um corpo sólido. Notemos que $\dot{e}$ apresenta uma variação total da ordem de 10^{-4} s^{-1}. Por conta da maré no satélite dominar a variação da excentricidade no mesmo, os valores mostrados no gráfico **b)** eram esperados. Para $\eta_c = 10^{15}$ Pa s, a dissipação de energia é próxima de 1 TW. Considerando o valor de viscosidade escolhido como usual durante o estudo, $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, a energia dissipada é de cerca de 10^{11} W.

TABELA 4.4. Valores $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{13} Pa s$\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s. Os valores foram calculados utilizando as equações 2.77, 2.78 e 2.79, onde a razão dissipativa k_2/Q é dada pela equação 4.1.

η_c (kg/m^3)	$\dot{a}$ (cm/ano)	$\dot{e}$ (s^{-1})	$\dot{E}$ (W)
10^{13}	0,206	1,832 $\times 10^{-20}$	-2,972 $\times 10^{10}$
10^{14}	1,985	1,763 $\times 10^{-19}$	-2,860 $\times 10^{11}$
10^{15}	4,159	3,695 $\times 10^{-19}$	-5,993 $\times 10^{11}$
10^{16}	0,519	4,616 $\times 10^{-20}$	-7,487 $\times 10^{10}$
10^{17}	0,052	4,628 $\times 10^{-21}$	-7,506 $\times 10^{9}$

A tabela 4.4 apresenta os valores calculados de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ utilizando as equações 2.77, 2.78, 2.79 e 4.1. Notemos que para o menor e o maior valor de η_c apresentamos

menores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$. No capítulo 5 discutiremos detalhadamente o gráfico **a)** e a relação com o parâmetro η_c em nossos resultados. Notemos que a variação de $\dot{e}$ é bem pequena devido à maré no núcleo do planeta. Na seção 4.5 discutiremos os resultados para a maré no satélite fazendo uma comparação com a Figura 4.8.

4.4.2 Dissipação por maré no envelope de gás

Na sub 4.2.2 foi apresentado o mecanismo do *ressonance locking*, o qual descreve a dissipação no envelope de gás do planeta.

É considerado, desde a formação, que a escala de tempo de evolução por maré do planeta seja comparável à sua idade. Em vista disso, assumimos que sua evolução orbital possa ser descrita da seguinte maneira:

$$t_{\text{maré}} = \frac{\dot{a}}{a}. \tag{4.12}$$

Lainey et al. (2020) considera que $t_{\text{maré}} \sim B/t$, onde B está relacionado com o movimento do gás no envelope e consideramos t como o tempo aproximado em que Saturno se estabeleceu em sua posição atual no Sistema Solar. Integrando a equação 4.12, encontramos o semi-eixo maior em função do tempo, logo

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^B, \tag{4.13}$$

onde a_0 e t_0 são o semi-eixo atual do satélite e o tempo desde que Saturno foi formado, respectivamente. Tomando a equação 4.13 considerando a_0 =186000 km, B =1/3 e $t0$ = 4,5 $\times 10^9$ anos construímos um gráfico da expansão orbital de Mimas para $t = -4 \times 10^{-9}$ anos, como mostra a Figura 4.9[2].

Notemos que o semi-eixo de Mimas expande rapidamente até 50000 km em $t \lesssim -0{,}2 \times 10^9$ anos. Posteriormente, a migração passa a ser cada vez mais lenta até atingir $a = 178377$ km em $t = 0$ ano. Para $t = 10^9$ anos, a migração de Mimas utilizando o mecanismo do RL na dissipação por maré no envelope de gás ocorre de maneira mais lenta em comparação à dissipação no núcleo de Saturno. No capítulo 5 nos aprofundaremos com mais detalhes em relação à variação do parâmetro B e ao fator dissipativo Q do envelope, calculado através da equação 4.6.

[2]Na equação 4.13 é inserido $t = 4 \times 10^9$ anos, pois $a > 0$. Para que toda as Figuras do trabalho fiquem padronizadas alteramos manualmente a escala de tempo somente no gráfico. Dessa forma, $t = 0$ sempre estará relacionado com o valor do semi-eixo atual de Mimas.

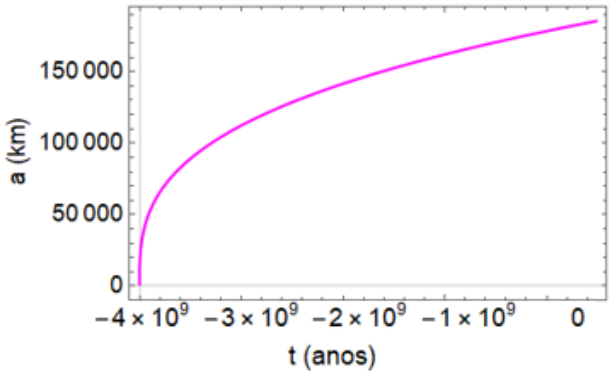


FIGURA 4.9. Variação do semi-eixo maior de Mimas calculado a partir da equação 4.13. Utilizamos B= 1/3. Observa-se uma rápida expansão inicial e a= 178377 km em $t = 0$ ano.

4.5 Dissipação por maré em Mimas

Como foi mencionado na seção 2.2, adotamos o modelo de fluência (*creep*) para investigar a dissipação no satélite Mimas. O objetivo inicial era comparar os resultados obtidos com os de Folonier et al. (2018). Durante todo o estudo consideramos Mimas um corpo homogêneo descartando qualquer oceano subsuperficial no corpo (Tajeddine et al., 2014).

Utilizando as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112 construímos os gráficos mostrados na Figura 4.10. São apresentadas as taxas de variação do semi-eixo, excentricidade e energia de Mimas em função da sua viscosidade. Consideramos o intervalo 10^9 Pa s $\leq \eta_{\text{Mimas}} \leq 10^{17}$ Pa s (ou 10^{-3} s^{-1} $\sim \gamma \sim 10^{-11}$ s^{-1}). As curvas exibem um comportamento de inversão de proporcionalidade dependendo da viscosidade atribuída ao satélite. Tal fato ocorre também nos gráficos da Figura 4.8 em relação à viscosidade do núcleo de Saturno. Essa relação se dá devido a ambos os modelos utilizarem a viscosidade como um parâmetro fundamental. Ou seja, o modelo de fluência se assemelha ao modelo de Maxwell na reologia. O máximo valor de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ ocorre para $\eta_{\text{Mimas}} \approx 10^{11}$ Pa s, justamente onde ocorre a inversão de proporcionalidade. Observamos que os valores de $\dot{a}$ e $\dot{e}$ e $\dot{E}$ diminuem conforme a viscosidade do satélite aumenta.

TABELA 4.5. Valores $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{13} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s em termos de potência. Os valores foram calculados utilizando as equações2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

η_{Mimas} (kg/m^3)	$-\dot{a}$ (cm/ano)	$-\dot{e}$ (s^{-1})	$-\dot{E}$ (W)
10^{15}	10^{-4}	10^{-17}	10^{9}
10^{16}	10^{-5}	10^{-18}	10^{8}
10^{17}	10^{-6}	10^{-19}	10^{7}
10^{18}	10^{-7}	10^{-20}	10^{10}

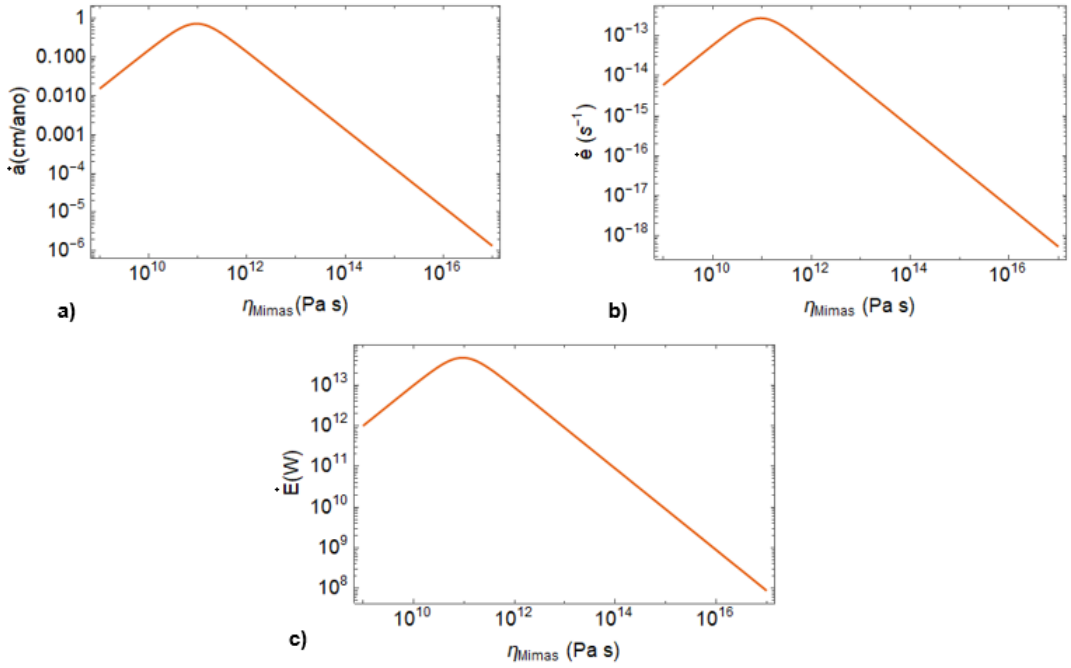


FIGURA 4.10. Taxa de variação temporal do semi-eixo (**a**), da excentricidade (**b**) e da energia (**c**) de Mimas em função de sua viscosidade. Para as construções dos gráficos foram utilizadas as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

Comparando a Figura 4.8 e tabela 4.4 com a Figura 4.10 e tabela 4.5, observamos que os valores para a taxa de variação do semi-eixo e da dissipação de energia devido à maré no satélite são inferiores aos valores devido à dissipação por maré no núcleo do planeta. Tomando um valor de viscosidade contido em ambas as Figuras e tabelas, por exemplo 10^{17} Pa s, e comparando os valores obtidos, encontramos que: $\dot{a}_c > \dot{a}_M$, $\dot{e}_c < \dot{e}_M$ e $\dot{E}_c > \dot{E}_M$. Os índices c e M referem-se à maré no núcleo de Saturno e à maré em Mimas, respectivamente. Esse resultado corrobora com o que havíamos obtido na seção 4.3, onde mostramos que a maré em Saturno comanda a migração do satélite e a maré em Mimas comando a variação de sua excentricidade. A ausência de atividade tectônica em Mimas é consequência da baixa dissipação de energia no satélite, sendo menor que 1 GW (Folonier et al., 2018). O gráfico **c)** da Figura 4.10 e a tabela 4.5 nos mostram então que para $\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{17}$ Pa s, a taxa de variação de energia é de fato menor do que 1 GW.

Em Folonier et al. (2018) é assumido que o fator de relaxação para Mimas é da ordem de $\gamma = 10^{-9}$ s^{-1} e consequentemente sua viscosidade seria $\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{16}$ Pa s, seguindo a equação 2.81. Todavia, utilizando este valor de γ nas equação 2.112 encontramos uma variação abrupta da excentricidade do satélite. Em vista disso, realizamos alguns gráficos com quatro valores distintos de γ e comparamos a variação da excentricidade para cada um deles.

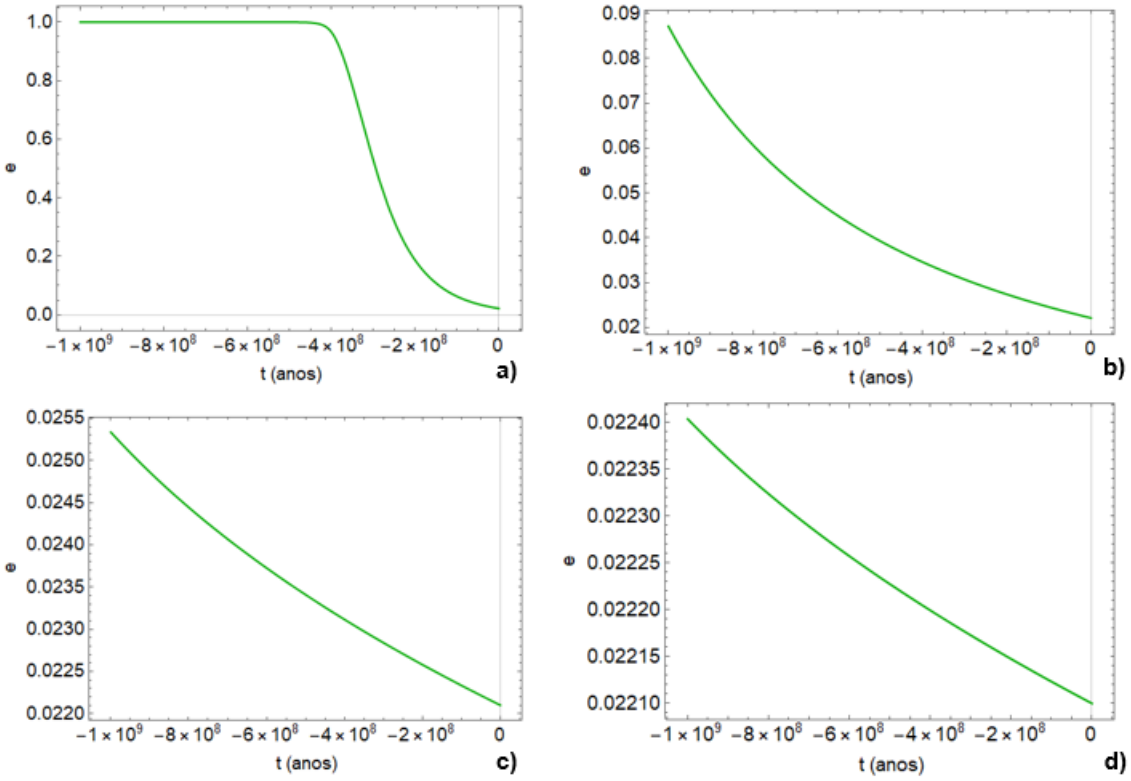


FIGURA 4.11. **a)**Variação da excentricidade para $\gamma \sim 10^{-9}$ s^{-1}. **b)**Variação da excentricidade para $\gamma \sim 10^{-10}$ s^{-1}. **c)**Variação da excentricidade para $\gamma \sim 10^{-11}$ s^{-1}. **d)**Variação da excentricidade para $\gamma \sim 10^{-12}$ s^{-1} Todas as imagens são funções $e(t)$ encontradas a partir da integração da equação 2.112.

Inserindo uma faixa de valores para γ entre $\sim 10^{-9}s^{-1}$ e $\sim 10^{-12}$ s^{-1} na equação 2.112 e integrando-a em $t = -10^9$ anos obtemos os gráficos apresentados na Figura 4.11. Em **a)** utilizamos $\gamma \sim 10^{-9}$ s^{-1} ($\eta_{\text{Mimas}} = 10^{15}$ Pa s). Verificamos que a excentricidade permanece constante até cerca de $t = -4 \times 10^8$ anos. Decaimento bruscamente a partir dessa escala de tempo. Analogamente, o mesmo ocorre no gráfico **b)**, onde consideramos $\gamma \sim 10^{-10}$ s^{-1} ($\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{16}$ Pa s). Para esses dois valores de γ, a excentricidade de Mimas no passado apresenta valores bem mais altos do que os encontrados na literatura (Meyer & Wisdom, 2008; Noyelles et al., 2019). Dessa forma assumimos que $\gamma \sim 10^{-11}$ s^{-1}, consequentemente $\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{17}$ s^{-1}. [3]

Como nosso objetivo inicial era comparar os resultados que obtivemos com os de Folonier et al. (2018) ($\dot{a} \sim 10^{-3}$ cm/ano, $\dot{e} \sim 10^{-18}$ s^{-1} e $\dot{E} \sim 10^8$ W), logo para o valor de γ e η_{Mimas} considerados durante este estudo encontramos: $\dot{a} \sim 10^{-2}$ cm/ano, $\dot{e} \sim 10^{-19}$ s^{-1} e $\dot{E} \sim 10^7$ W.

Neste capítulo descrevemos Saturno como um corpo de duas camadas, onde utilizamos o modelo de Maxwell no núcleo e o mecanismo do *resonance locking* no envelope.

[3]Utilizar $\gamma \sim 10^{-12}$ s^{-1} não altera significativamente os resultados da evolução orbital de Mimas. Contudo, por questão de escolha trabalhamos com $\gamma \sim 10^{-12}$ s^{-1} e a viscosidade de Mimas sendo $\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{17}$ Pa s

Consideramos Mimas um corpo rígido e homogêneo. A partir das equações apresentadas no capítulo 2, obtivemos que a maré no planeta domina a variação do semi-eixo maior e consequentemente da dissipação de energia. Já a variação da excentricidade é comandada pela maré no satélite. Notemos que tanto $\dot{e}_{\text{Saturno}}$ quanto $\dot{e}_{\text{Mimas}}$ são extremamente pequenos para os valores de viscosidade atribuídas ao núcleo de Saturno e também à Mimas. Ainda assim, $\dot{e}_{\text{Mimas}}$ mostrou-se maior do que $\dot{e}_{\text{Saturno}}$. Tomamos $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e $\gamma \sim 10^{-11}$ nas análises posteriores da evolução orbital de Mimas. No capítulo a seguir apresentaremos os resultados que obtivemos considerando a dissipação em cada camada do planeta e também, a dissipação simultânea no núcleo e no envelope de gás.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Evolução orbital de Mimas

Para o estudo da evolução orbital de Mimas, consideraremos três valores distintos para η_c com o intuito de verificar se efetivamente este é o parâmetro de maior relevância na dissipação por maré no núcleo de Saturno e na expansão orbital de Mimas.

Fixando a rigidez, o raio do núcleo de saturno e o fator de relaxação em $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1}, respectivamente. Substituindo a razão dissipativa k_2/Q dada pela equação 4.1 em 4.10, obtemos a taxa de variação temporal do semi-eixo maior de Mimas em função da viscosidade do núcleo de Saturno, como mostra a Figura 5.1. Consideramos um o intervalo para a viscosidade do núcleo, η_c, de $10^{10} - 10^{22}$ Pa s no gráfico apresentado. O comportamento de inversão de proporcionalidade se repete pelo fato de ocorrer uma mudança de regime. O pico da curva sucede-se quando $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. Shoji & Hussmann (2017) mostraram que numa faixa de viscosidade próxima ao valor do pico ($\eta_c = 10^{13}$ Pa s e $\eta_c \lesssim 10^{14}$ Pa s), Im$[k_{2s}]$ diminui e a frequência $\mathrm{w}_f \sim 0{,}2 \times 10^{-4} s^{-1}$ é menor do que a frequência de Maxwell $\mathrm{w}_M = \mu_c/\eta_c \sim 10^{-4} s^{-1}$, logo o núcleo se comporta como um fluido e a dissipação diminui. Já para valores onde $\eta_c \gtrsim 10^{15}$ Pa s, Im$[k_{2s}]$ aumenta e $\mathrm{w}_f > \mathrm{w}_M (\sim 10^{-5}$ s$^{-1})$ e o núcleo se comporta como um sólido viscoelástico, aumentando a dissipação de energia.

Notemos que a taxa de variação temporal do semi-eixo maior de Mimas tem seu valor máximo para $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. Valores próximos a $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s influenciam significativamente na variação do semi-eixo maior de Mimas. Se considerarmos novamente o intervalo de η_c discutido na subseção 4.4.1 (10^{13} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{17}$ Pa s) observamos que valores menores e maiores que 10^{13} Pa s e 10^{16} Pa s, respectivamente, apresentam valores para $\dot{a}$ extremamente pequenos. Calculando, a partir das equações 4.1 e 4.10, o valor de

$\dot{a}$ referente ao intervalo de viscosidade mencionado, encontramos que $\dot{a}$ para $\eta_c = 10^{13}$ Pa s é menor do que para $\eta_c = 10^{16}$ Pa s, porém maior do que para $\eta_c = 10^{17}$ Pa s. Dessa forma, temos os seguintes valores de $\dot{a}$ atribuído a cada valor de η_c: $\dot{a}_{\eta_c=10^{13}} \approx 0{,}206$ cm/ano, $\dot{a}_{\eta_c=10^{14}} \approx 1{,}984$ cm/ano, $\dot{a}_{\eta_c=10^{15}} \approx 4{,}158$ cm/ano, $\dot{a}_{\eta_c=10^{16}} \approx 0{,}519$ cm/ano e $\dot{a}_{\eta_c=10^{17}} \approx 0{,}052$ cm/ano.

Assim sendo, corpos que apresentam viscosidades muito baixas dissipam menos energia, visto que $\dot{a} < 10^{-6}$. Ou seja, o corpo deformado retorna a sua condição normal instantaneamente. Lembrando que o atraso de maré, discutido no capítulo 2, está relacionado com a dissipação de energia. Corpos extremamente rígidos, também apresentam baixa dissipação de energia. Contudo, isto ocorre pelo fato da deformação sofrida ser nula ou quase nula.

Para análises posteriores da evolução orbital de Mimas neste capítulo, tomaremos três valores para a viscosidade do núcleo de Saturno: $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\eta_c = 10^{15}$ Pa s e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s. A ideia foi escolher um valor para o qual $\dot{a}$ fosse diretamente proporcional a η_c e um em que fosse inversamente proporcional tomando $\eta_c = 10^{15}$ Pa s como o valor de referência.

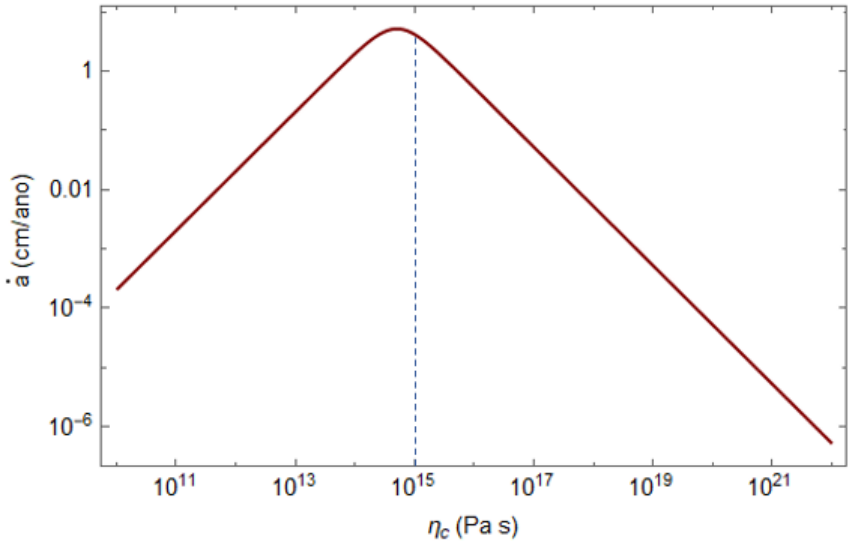


FIGURA 5.1. O gráfico apresenta $\dot{a}$ em cm/ano pela viscosidade do núcleo de Saturno. O máximo valor de $\dot{a}$ está atribuído à $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s, denotado pela reta pontilhada.

Na Figura 5.2 são apresentados gráficos de contorno com as variações dos principais parâmetros que utilizamos. A barra de cor representa $a(t)$ em $t = -10^9$ anos. Substituímos a razão k_2/Q, referente à dissipação por maré no núcleo de Saturno, dada pela equação 4.1 em 4.9, 4.10 e 4.11. Integramos em $t = 10^9$ anos, de maneira que os parâmetros fixos em cada gráfico apresentam os seguintes valores: $\eta_c = 10^{16}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0{,}219\ R_s$, $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1} e $B = 1/3$.

Para a Figura 5.2 seguimos a referência de Remus et al. (2014). Os autores apresentam gráficos $\mu \times \eta$, entretanto para a barra de cor eles consideram o fator dissipativo $Q_{efetivo}$ de Saturno. Nesses gráficos, o intervalo considerado foi 10^8 Pa $< \mu < 10^{14}$ Pa. Os autores também mencionam um valor aproximado de $\mu \approx 4,5 \times 10^{10}$ Pa. Em Shoji & Hussmann (2017) foram apresentados gráficos similares ao do artigo de Remus et al. (2014), no entanto com um intervalo 10^{10} Pa $< \mu < 10^{13}$ Pa para a rigidez do núcleo de Saturno. Com base nessas referências decidimos utilizar o intervalo 10^{11} Pa $\leq \mu \leq 10^{14}$ Pa, para a rigidez do núcleo e tomamos a Shoji & Hussmann (2017) como referência para o intervalo de R_c. Os intervalos de γ e η_c foram discutidos no capítulo anterior.

As imagens **a)**, **b)** e **c)** mostram a variação do semi-eixo maior quando trabalhamos com η_c. O semi-eixo maior de Mimas varia em torno de 50000 km nas três imagens. Observamos, através da mudança de coloração, que a faixa de maior variação do semi-eixo maior se encontra quando 10^{14}Pa s $\lesssim \eta_c \lesssim 10^{16}$ Pa s, corroborando com a discussão acerca de nossa escolha para os três valores de η_c. Ao variar a rigidez μ_c em **a)** e em **d)**, o semi-eixo maior de Mimas varia cerca de 25000 km, sendo ele o parâmetro dominante em **d)** e **e)**. O fator de relaxação γ está associado à maré em Mimas, a qual influencia a variação de sua excentricidade. Portanto, em relação ao semi-eixo maior, γ tem pouca influência em sua variação. Ainda assim, γ consegue ser mais influente do que o raio do núcleo R_c, como mostra a imagem **f)**. O semi-eixo maior de Mimas varia dependendo do valor atribuído à γ, contudo esse valor não apresenta um intervalo considerável. Observamos ainda que valores que englobam a região em azul resultam na ultrapassagem de Mimas pelo anel F de Saturno. Assumindo que que Mimas é um corpo fluido, calculamos seu limite de Roche, de maneira que $a_R = 2{,}456 R_s \left(\rho_s/\rho_m\right)^{1/3} \sim$ 120463 km (Murray & Dermott, 1999). Logo, os valores contidos na região em azul nos gráficos **d)** e **e)** nos mostram que Mimas também ultrapassou seu limite de Roche fluido.

Na Figura 5.3 são apresentados novamente gráficos de contorno com as variações dos principais parâmetros que utilizamos. A barra de cor representa $a(t)$ em $t = -10^9$ anos. Substituímos a razão k_2/Q, referente à dissipação por maré no núcleo de Saturno, dada pela equação 4.1 em 4.9, 4.10 e 4.11. Integramos em $t = 10^9$ anos, de maneira que os parâmetros fixos em cada gráfico apresentam os seguintes valores: $\eta_c = 10^{16}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0{,}219\ R_s$, $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1} e $B = 1/3$.

Para a Figura 5.3 seguimos a referência de Remus et al. (2012) e Henning et al. (2009). Em ambos os artigos, os autores citam os seguintes valores de rigidez: $\mu_{gelo} = 10^9$ Pa e $\mu_{silicato} = 10^{11}$ Pa. Com base nessas referências decidimos utilizar para estes novos gráficos o intervalo 10^9 Pa $\leq \mu \leq 10^{12}$ Pa, para a rigidez do núcleo e tomamos a Shoji & Hussmann (2017) como referência para o intervalo de R_c. Os intervalos de γ e η_c foram discutidos no capítulo anterior. Nesta Figura também inserimos gráficos variando

o parâmetro B referente à dissipação por maré no envelope de Saturno. Consideramos o seguinte intervalo, $1/7 \leq B \leq 1$. Estes valores escolhidos para o intervalo de B serão discutidos com mais detalhes posteriormente na subseção 5.1.1.2.

Notemos que para este novo intervalo de rigidez, observado nos gráficos **a)**, **e)** e **f)**, a região em azul torna-se menos extensa. Isso pode ser concluído ao comparar os mesmos gráficos com os da Figura 5.2. A viscosidade do núcleo ainda mantém-se como o parâmetro que apresenta maior influência na variação do semi-eixo maior de Mimas. Em relação aos gráficos referentes à variação de B, observamos que em **g)**, a viscosidade é o parâmetro dominante e que a faixa de valores entre 10^{14} Pa s e 10^{16} Pa s ainda corrobora com a discussão realizada anteriormente. Em **h)**, valores para a rigidez do núcleo de Saturno sendo $\mu_c \approx 10^{11.5}$ Pa nos mostram que Mimas adentra tanto ao anel F de Saturno quanto ao seu limite de Roche fluido, em 139826 km e 120463 km, respectivamente. Nos gráficos **i)** e **j)**, notamos que o parâmetro B tem maior influencia na variação do semi-eixo de Mimas do que R_c e γ, visto que este parâmetro está associado diretamente ao fator dissipativo Q do envelope de Saturno e a ao semi-eixo maior, de acordo com com as equações 4.6 e 4.13, respectivamente.

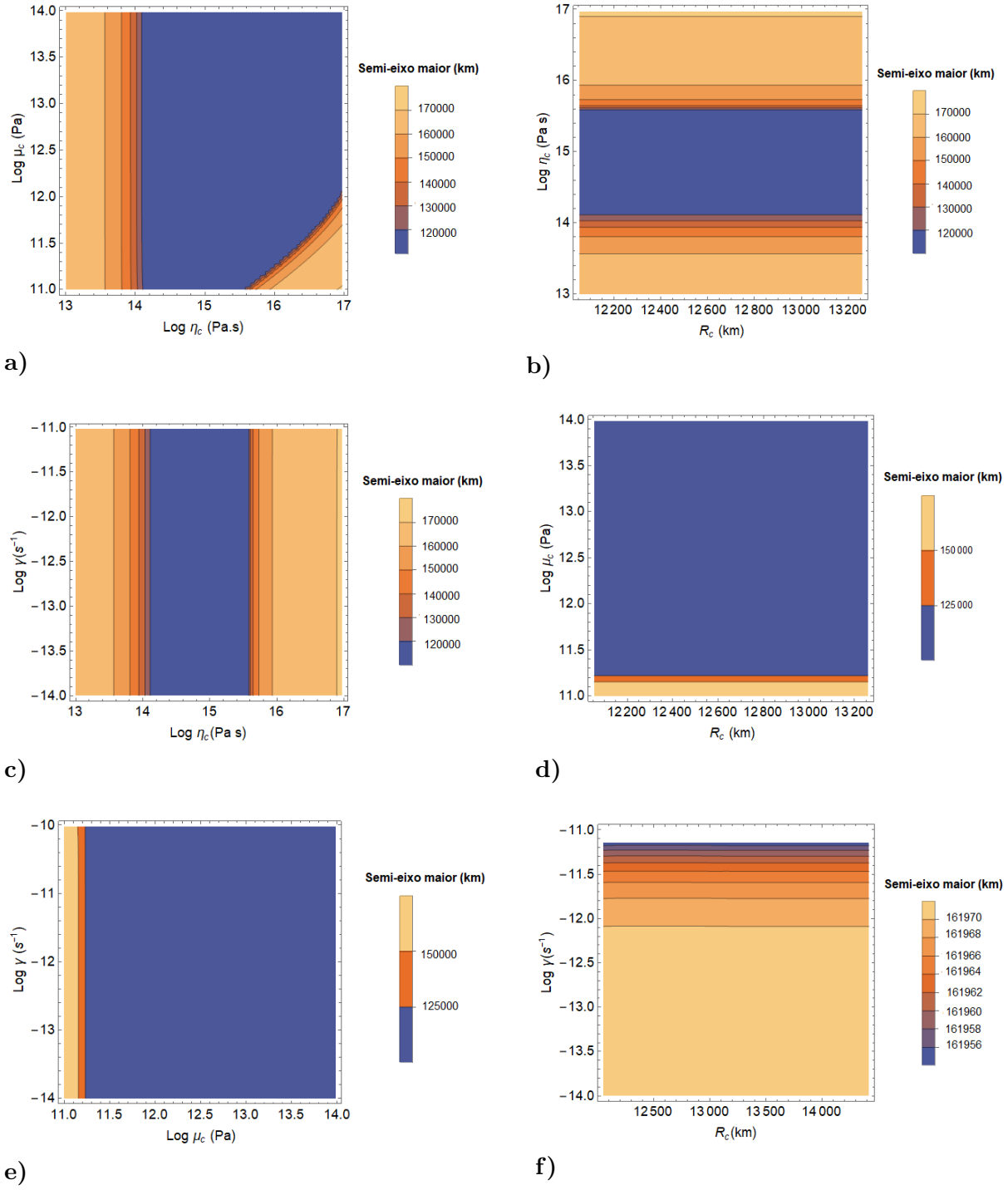
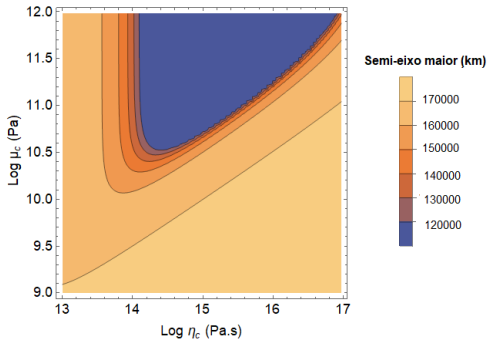
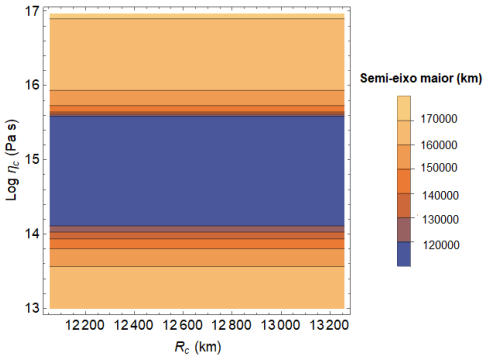


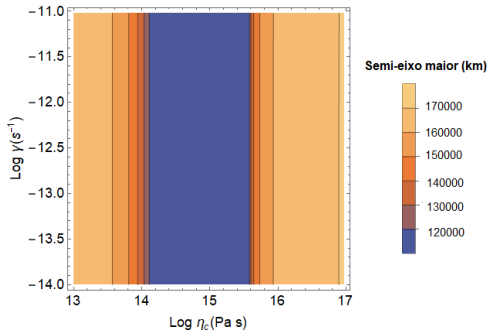
FIGURA 5.2. A Figura apresenta o intervalo de valores de alguns parâmetros específicos para o semi-eixo maior final de Mimas. A barra de cor representa o semi-eixo maior de Mimas para $t = -10^9$ anos. Comparando o parâmetro η_c com os demais notamos, que dentro do intervalo escolhido 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s, o semi-eixo maior de Mimas varia mais.


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
Log μ_c (Pa)
Log η_c (Pa.s)

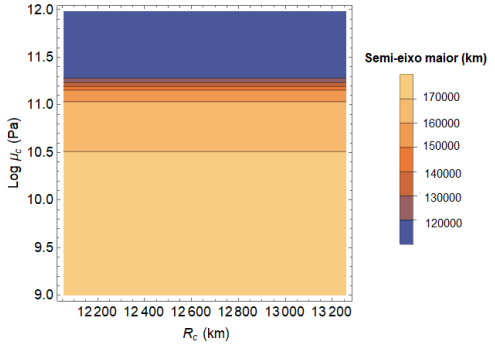
a)


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
Log η_c (Pa s)
R_c (km)

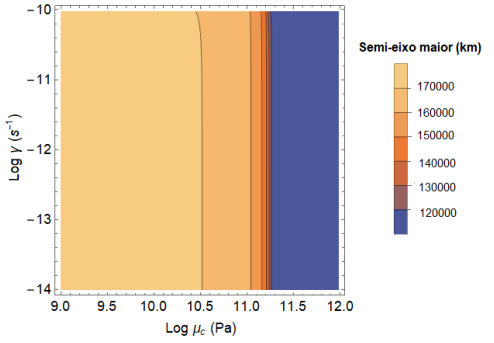
b)


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
Log γ (s^{-1})
Log η_c (Pa s)

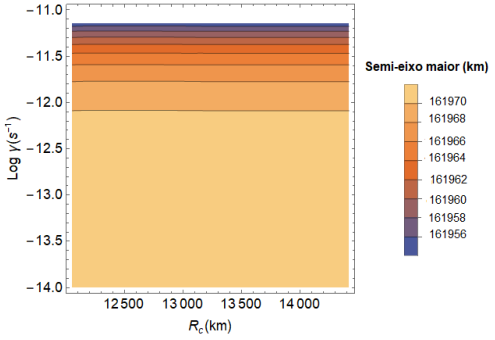
c)


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
Log μ_c (Pa)
R_c (km)

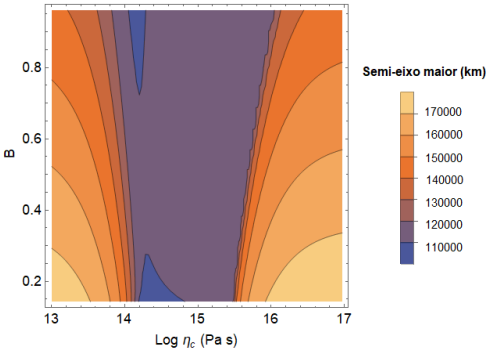
d)


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
Log γ (s^{-1})
Log μ_c (Pa)

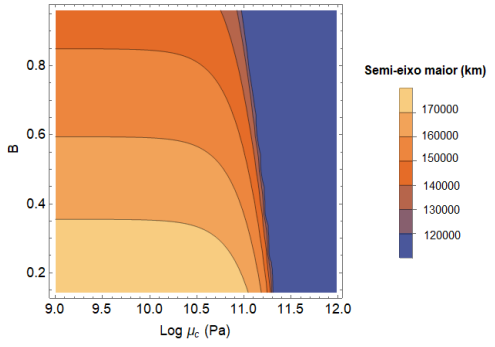
e)


Semi-eixo maior (km)
161970
161968
161966
161964
161962
161960
161958
161956
Log γ (s^{-1})
R_c (km)

f)


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
110000
B
Log η_c (Pa s)

g)


Semi-eixo maior (km)
170000
160000
150000
140000
130000
120000
B
Log μ_c (Pa)

h)

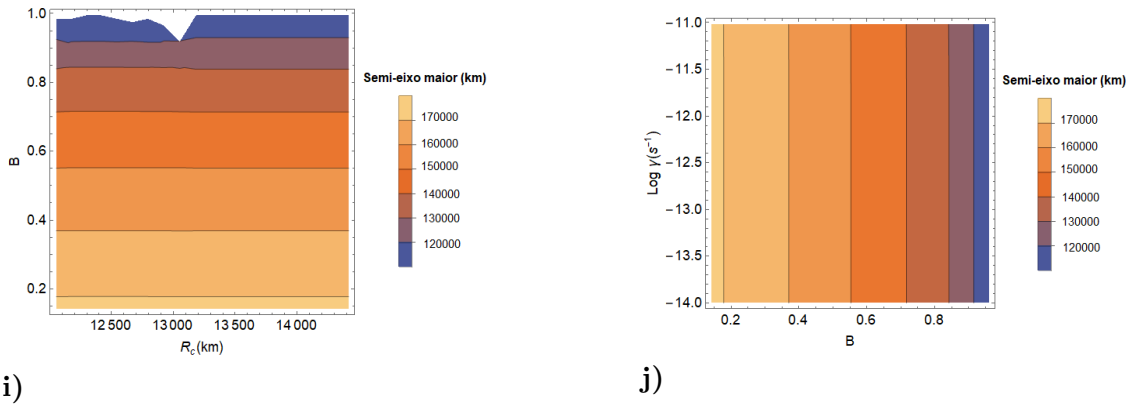


FIGURA 5.3. A Figura apresenta o intervalo de valores de alguns parâmetros específicos para o semi-eixo maior final de Mimas. A barra de cor representa o semi-eixo maior de Mimas para $t = -10^9$ anos. Foi inserido a influência do parâmetro B referente à dissipação no envelope de gás de Saturno e um novo intervalo para a rigidez do núcleo, μ_c. Comparando o parâmetro η_c com os demais notamos, que dentro do intervalo escolhido 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s, o semi-eixo maior de Mimas varia mais.

Desse modo, a viscosidade do núcleo de Saturno é o parâmetro que apresenta maior influência na variação do semi-eixo maior de Mimas e também na variação de sua excentricidade. De modo que valores de η_c próximos à 10^{15} Pa s evidenciam esta conclusão. Nas próximas seções mostraremos com mais detalhes as variações destes parâmetros orbitais associados às dissipações em cada camada e seus respectivos parâmetros.

5.1.1 Evolução orbital de Mimas associada a cada camada de Saturno

Nesta subseção são apresentados os resultados acerca da variação do semi-eixo maior e da variação da excentricidade no tempo considerando a dissipação em cada camada de Saturno. Fixamos durante toda a subseção os principais parâmetros em $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1}.

5.1.1.1 Núcleo de Saturno

Tomando a razão dissipativa k_2/Q referente ao núcleo, dada pela equação 4.1, substituindo-a em 4.9, 4.10, 4.11 e integrando acopladamente em $t = -10^9$ anos obtemos as variações do semi-eixo maior e excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no núcleo de Saturno.

Considerando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s observamos que Mimas varia seu semi-eixo maior em cerca de 26000 km em $t = 10^9$ anos, como mostra o gráfico **a)** da Figura 5.4. Isso nos fornece um $\Delta a \approx 2{,}6$ cm/ano. Para que não haja confusão com o valor de $\dot{a}$ para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s exibido na tabela 4.4, é válido ressaltar que a variação Δa é referente ao intervalo de tempo $0 \leq t \leq 10^9$ anos. O gráfico **b)** nos fornece a variação

da excentricidade de Mimas em $t = 10^9$ anos. Assim, notamos que o satélite apresenta $\Delta e \sim 0{,}003$ para a mesma escala de tempo.

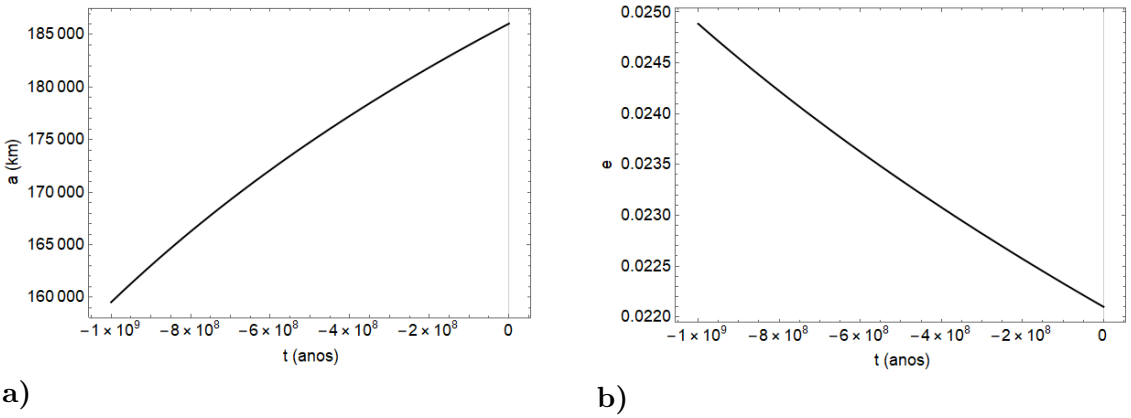


FIGURA 5.4. Variação **a)**do semi-eixo maior e **b)**da excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no núcleo de Saturno quando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s. Tomamos a equação 4.1 e substituímos em 4.9,4.10 e 4.11. A integração foi feita em $t = -10^9$ anos.

Em relação ao fator dissipativo Q do núcleo de Saturno, podemos comparar a migração de Mimas considerando um valor constante para Q e considerando que Q varie no tempo. Tomando a equação 4.1 e assumindo que o movimento médio de Mimas, n, não se altera com o tempo, calculamos o valor constante de Q para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, de maneira que $Q_{\text{cte}} = 6163.96$ e a razão $k_2/Q_{\text{cte}} \simeq 6{,}2 \times 10^{-5}$. Shoji & Hussmann (2017) fizeram uma análise semelhante e calcularam o valor da razão dissipativa k_2/Q_{cte} do núcleo de Saturno utilizando $\eta_c = 5 \times 10^{13}$ Pa s. Para este valor de viscosidade foi encontrado que $k_2/Q_{\text{cte}} \simeq 2{,}8 \times 10^{-5}$.

Nomeamos de $Q_{10^{14}}$ o valor constante de Q para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e $Q(t)_{10^{14}}$ para Q variando no tempo considerando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s. Inserindo $k_2/Q_{10^{14}} \simeq 6{,}2 \times 10^{-5}$ nas equações 4.9, 4.10 e 4.11, e integrando em $t = 10^9$ anos encontramos a variação do semi-eixo maior maior de Mimas devido à dissipação no núcleo. A Figura 5.5 apresenta a expansão orbital do satélite para $Q_{10^{14}}$ (curva tracejada) e $Q(t)_{10^{14}}$ (curva preenchida), já discutido no gráfico **a)** da Figura 5.3. É possível observar que, no passado, a variação do semi-eixo maior de Mimas era maior para o fator constante $Q_{10^{14}}$. Ou seja, a variação de energia considerando um valor constante de Q era superior do que para Q variando no tempo. A partir de aproximadamente $t =$ -5 $\times 10^8$ anos as duas curvas se sobrepõem dissipando assim a mesma taxa de energia por maré com a mesma variação de semi-eixo maior para Mimas. É possível concluir que inicialmente $Q(t)_{10^{14}} > Q_{10^{14}}$. Portanto, o resultado reforça a ideia de que o fator dissipativo Q do núcleo de Saturno varia em função do tempo (Shoji & Hussmann, 2017).

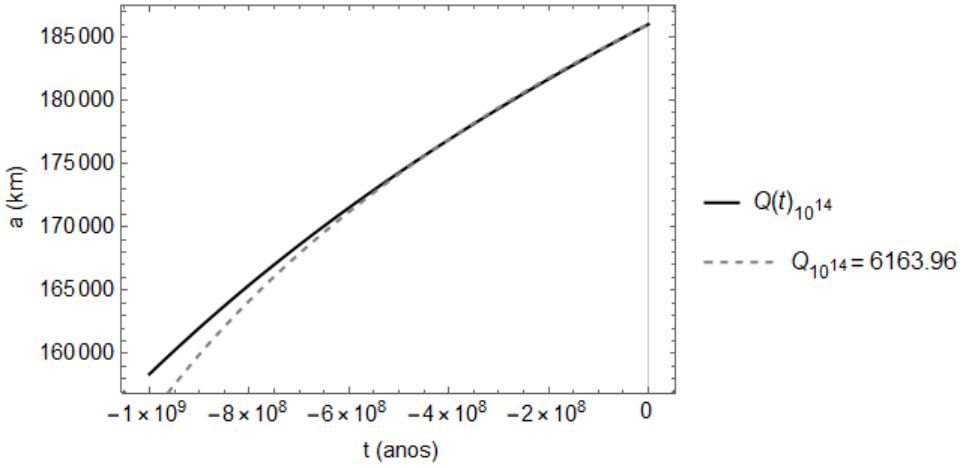


FIGURA 5.5. Comparação das variações do semi-eixo maior de Mimas para $Q(t)_{10^{14}}$ (variável) e $Q_{10^{14}}$ (constante). Ambos foram calculados usando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s. Notemos que $\dot{a}_{\text{Q fixo}} > \dot{a}_{\text{Q variável}}$.

5.1.1.2 Envelope de gás de Saturno

Tomamos a razão dissipativa k_2/Q dada pela equação 4.6 e inserimos nas equações 4.9, 4.10 e 4.11. Integrando em $t = 10^9$ anos encontramos as variações do semi-eixo maior e excentricidade de Mimas em função do tempo, como é apresentado na Figura 5.6. Verificamos a partir do gráfico **a)** que Mimas migrou cerca de 16000 km em $t = -10^9$ anos. Ou seja, $\Delta a \approx 1{,}6$ cm/ano e 1 cm/ano a menos quando comparado à migração devido à dissipação no núcleo do planeta. Observamos no gráfico **b)** que $\Delta e \approx 2{\times}10^{-6}$ em $t = 10^-9$ anos. Um valor cerca de 10^{-3} vezes menor do que para a dissipação por maré no núcleo do planeta.

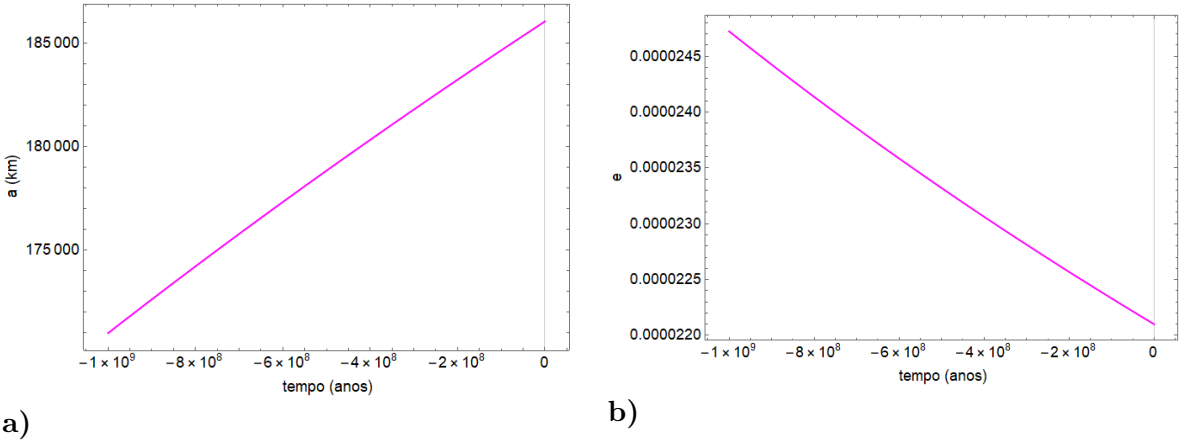


FIGURA 5.6. Variações **a)** do semi-eixo maior e **b)** da excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no envelope de Saturno. Substituímos a equação 4.6 em 4.9, e 4.10. Integramos acopladamente com a equação 4.11em $t = -10^9$ anos.

Considerando novamente a equação 4.13 calculamos o valor do semi-eixo maior maior utilizando t = -4 × 10^9 anos, t_0 = 4,5 × 10^9 e a_0 =186000 km. Para o parâmetro B escolhemos três outros valores além de $B = 1/3$, utilizado na Figura 4.9. São eles:

$B = 1$, $B = 1/2$ e $B = 1/7$. Nosso objetivo é comparar as curvas referentes à migração de Mimas em $t = -4 \times 10^9$ para os quatro valores de B mencionados acima.

Em relação à construção dos gráficos, assumimos que Mimas é um corpo fluido e calculamos seu limite de Roche, de maneira que $a_R = 2{,}456 R_s \left(\rho_s/\rho_m\right)^{1/3} \sim 120463$ km (Murray & Dermott, 1999). Ao passo que $a_R = R_s \left(3\rho_s/\rho_m\right)^{1/3} \sim 70740.3$ km para Mimas sendo um corpo rígido (Shoji & Hussmann, 2017). Consideramos também a posição do anel F[1] de Saturno. Assim sendo, os limites de Roche e o anel F serão três posições fixadas nos gráficos.

A Figura 5.7 apresenta os gráficos com as variações do semi-eixo maior de Mimas em função do tempo utilizando os quatro valores de B mencionados anteriormente. No gráfico **a)** utilizamos $B = 1$. Notemos a trajetória é reta, com Mimas ultrapassando o anel F em $t \approx -0{,}5 \times 10^9$ anos. Em pouco mais de -10^9 anos e em cerca de -2,2 $\times 10^9$, o satélite ultrapassa seu limite de Roche fluido e seu limite de Roche rígido, respectivamente. No gráfico **b)** consideramos $B = 1/2$. Observamos uma migração um pouco mais rápida no passado, com o satélite expandindo sua órbita em 50000 km em $t \approx -3{,}6 \times 10^9$ anos. O gráfico **c)** apresenta a mesma curva da Figura 4.9. Utilizamos $B = 1/3$. Para est valor de B, o satélite ultrapassa o anel F em $t \approx -2 \times 10^9$ anos. Notemos que conforme diminuímos o valor do parâmetro B mais rápida é a expansão da órbita do satélite em torno de $t \approx -4 \times 10^9$ anos. Para $B = 1/7$, como mostra o gráfico **d)**, Mimas atinge cerca de 10^6 km em $t = -4 \times 10^9$ anos, 50000 km a mais em comparação com o gráfico **c)**. Além disso, o satélite ultrapassa o anel F em $t \approx -3,5 \times 10^9$ anos. Também é possível observar, do passado para o presente, quanto menor é o valor do de B mais rápido o satélite ultrapassa as três posições consideradas. Logo, a equação 4.13 nos fornece a expansão da órbita do satélite como uma função de lei de potência do tempo, visto que a_0 e t_0 são valores constantes. Calculando então as distâncias orbitais em função do tempo utilizando a equação 4.13, obtemos: $a_{B=1}$= 164907 km, $a_{B=1/2}$= 174910 km, $a_{B=1/3}$= 178377 km, $a_{B=1/3}$= 182425 km.

A partir da equação 4.6 é possível analisar a variação do fator dissipativo Q do envelope em função do semi-eixo maior de Mimas, como é exibido na Figura 5.8. Inserimos a mesma variação do semi-eixo maior maior devido ao RL em $t = -10^9$ anos (vide Figura 5.6). Observamos que o fator Q diminui à medida que o semi-eixo maior aumenta, logo $\dot{a}$ tem o valor aumentado devido à dissipação no envelope de gás do planeta. Para o valor atual do semi-eixo maior de Mimas encontramos $Q \sim 8800$ para o envelope de Saturno. Este valor é superior do que quando consideramos o fator Q constante para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s devido à dissipação no núcleo. Notemos que $\Delta a \simeq 16000$ km encontramos $\Delta Q \simeq 3200$.

[1] https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/satringfact.html

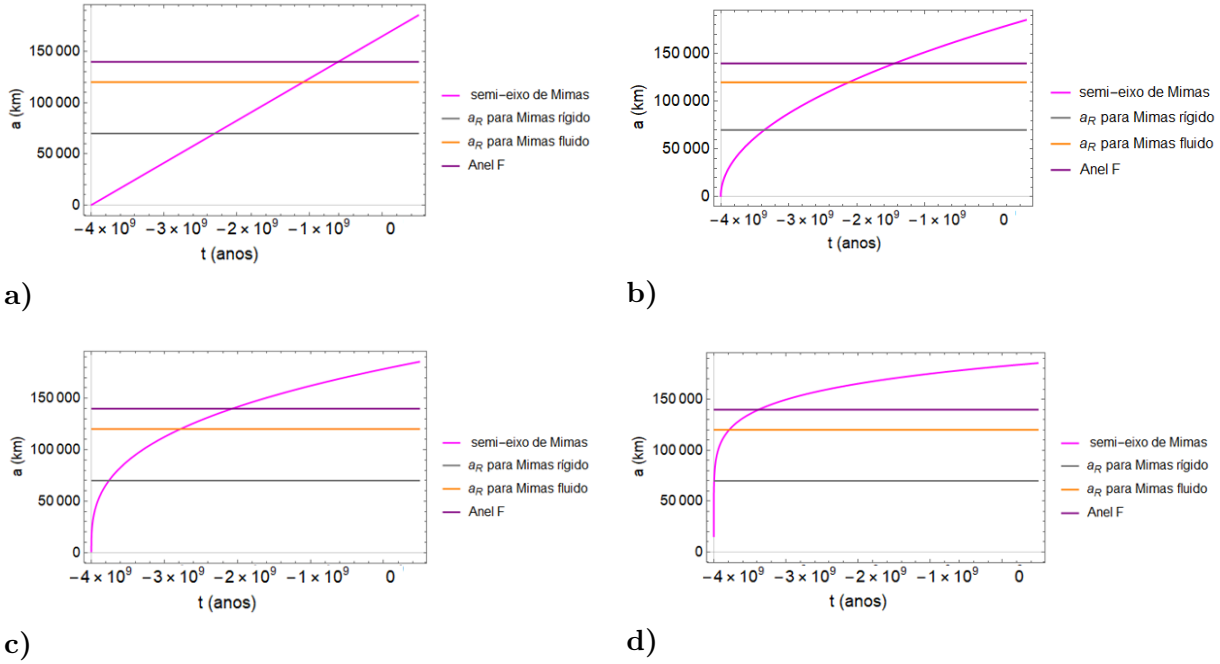


FIGURA 5.7. Variações do semi-eixo maior e excentricidade de Mimas devido à dissipação por maré no envelope de Saturno para quatro valores de B. **a)** B=1, **b)** B=1/2, **c)**B=1/3 e **d)**= 1/7.

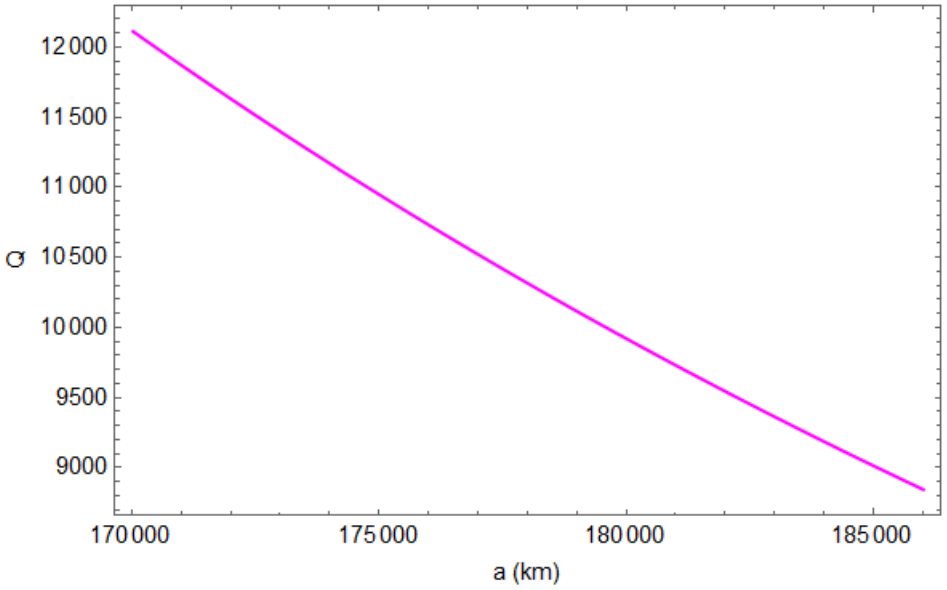


FIGURA 5.8. Variação do fator Q pelo semi-eixo maior de Mimas devido somente à dissipação no envelope gasoso. Observamos que quanto maior é o semi-eixo do satélite menor é o valor de Q.

5.1.2 Dissipação nas duas camadas (núcleo + envelope)

Ao analisarmos as contribuições das duas dissipações simultaneamente para os três valores de viscosidades estudados, observamos como a viscosidade do núcleo é influente na expansão orbital de Mimas. Para todos os resultados desta subseção fixamos a rigidez do núcleo, o raio do núcleo e o fator de relaxação em $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}\ s^{-1}$, respectivamente.

Na Figura 5.9 foram somadas as razões dissipativas referentes a cada camada do planeta, dadas pelas equações 4.1 e 4.6. Inserimos a soma em 4.9 e 4.10, e integrando ambas equações juntamente com a equação 4.11 obtemos o gráfico da variação do semi-eixo maior de Mimas considerando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e $B = 1/3$ em $t = -10^9$ anos. Nosso objetivo é verificar a variação do semi-eixo maior do satélite em função do tempo para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\eta_c = 10^{15}$ Pa s e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s.

Observamos que a variação máxima do semi-eixo maior ocorre quando $\eta_c = 10^{15}$ Pa s, corroborando com o pico encontrado na Figura 5.1. Além disso, para esse mesmo valor de viscosidade, Mimas entra em sincronismo com Saturno em aproximadamente $t \approx -5 \times 10^8$ anos. Notamos que o valor mais baixo para η_c nos fornece um valor maior de $\dot{a}$ quando comparado com $\eta_c = 10^{16}$ Pa s. Todavia, essa relação comparativa só é válida para estes dois valores, uma vez que $\dot{a}$ para $\eta_c = 10^{13}$ Pa s é menor do que para $\eta_c = 10^{16}$ Pa s, de maneira que $\dot{a}_{\eta_c=10^{13}} \approx 0{,}206$ cm/ano, $\dot{a}_{\eta_c=10^{14}} \approx 1{,}984$ cm/ano, $\dot{a}_{\eta_c=10^{15}} \approx 4{,}158$ cm/ano e $\dot{a}_{\eta_c=10^{16}} \approx 0{,}519$ cm/ano.

O mesmo ocorre ao comparar a influência da viscosidade do núcleo na variação da excentricidade de Mimas, apresentada na Figura 5.10. A viscosidade $\eta_c = 10^{15}$ Pa s fornece a maior variação da excentricidade, em torno de $\Delta e \approx 0,0005$. Comparando as variações em relação à $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s verificamos que, neste caso, não há uma discrepância significativa entre os dois valores para a viscosidade. Entretanto, $\eta_c = 10^{14}$ Pa s permanece sendo responsável pela maior variação do semi-eixo maior . Em relação às variações da excentricidade, $\eta_c = 10^{14}$ Pa s resulta em $\Delta e \approx 3 \times 10^{-4}$ e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s nos fornece $\Delta e \approx 2{,}6 \times 10^{-4}$.

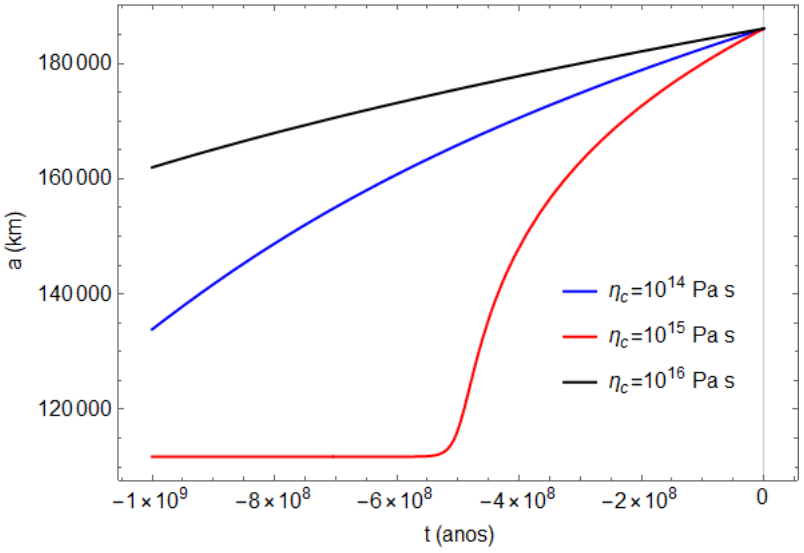


FIGURA 5.9. Variação do semi-eixo maior de Mimas utilizando a soma das dissipações em cada camada do planeta (núcleo+envelope) para três valores distintos de viscosidade do núcleo de Saturno. $\eta_c = 10^{15}$ Pa s nos fornece a maior variação do semi-eixo maior e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s a menor variação.

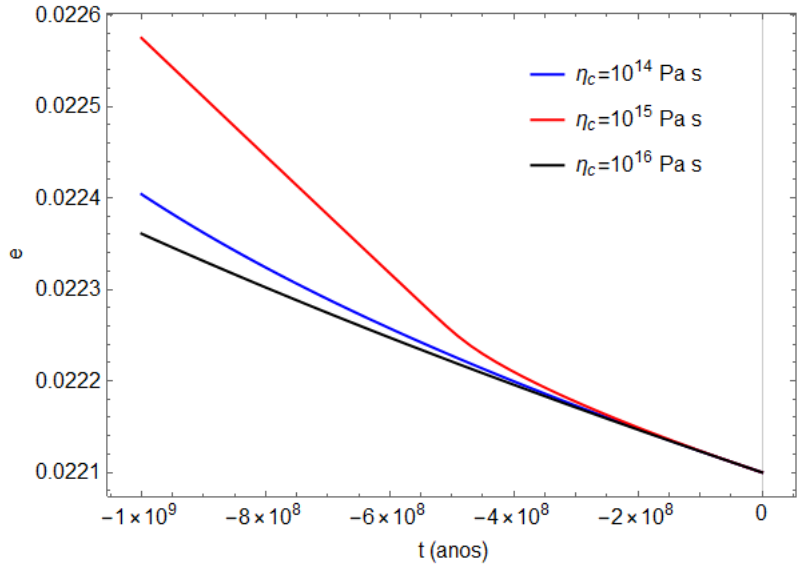


FIGURA 5.10. Variação da excentricidade devido à dissipação simultânea no núcleo e no envelope de Saturno. Novamente temos a variação máxima da excentricidade para $\eta_c = 10^{15}$ Pa s. O valor de $\eta_c = 10^{16}$ Pa s nos fornece a menor variação da excentricidade.

Na Figura 5.11 somamos a equação 4.1 com a 4.6 e inserimos em 4.9 e 4.10. Integrando ambas equações juntamente com a equação 4.11 obtemos o gráfico da variação do semi-eixo maior de Mimas considerando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e $B = 1/3$ em $t = -10^9$ anos. Inserimos as posições dos limites de Roche considerando Mimas um corpo fluido e um corpo rígido, além da posição do anel F como foi realizado na Figura 5.7. A curva em azul representa a soma das dissipações no núcleo e no envelope. Observamos que para as duas dissipações simultaneamente, Mimas ultrapassa o anel F de Saturno em cerca de -10^9 anos. A variação do semi-eixo maior nessa mesma escala de tempo é de aproximadamente 40000 km. As curvas tracejadas representam as contribuições do núcleo, em preto; e do envelope, em rosa, separadamente. Para obtê-las realizamos os mesmos procedimentos dos gráficos **a)** das Figuras 5.4 e 5.6. Em $t = -10^9$ anos tanto a dissipação no núcleo quanto a dissipação no envelope não foram altas o suficiente para fazer com que o satélite alcançasse uma das três posições inseridas.

A Figura 5.12 é similar à Figura 5.10. O que difere entre as duas é o tempo de integração. Considerando $t = -4 \times 10^9$ anos verificamos que para a curva azul, Mimas ultrapassa o anel F e seu limite de Roche fluido em $t \approx -10^9$ e $t \approx 1{,}2 \times 10^9$ anos, respectivamente. Analisando somente a contribuição do núcleo, observamos que Mimas ultrapassa o anel F em cerca de $t \approx -1,5 \times 10^9$ anos e seu limite de Roche fluido em cerca de $t \approx -1,8 \times 10^9$ anos. Considerando somente a contribuição do envelope, Mimas ultrapassa o anel F e o limite de Roche fluido em torno de $t \approx -2,6 \times 10^9$ anos e $t \approx -3,2 \times 10^9$ anos

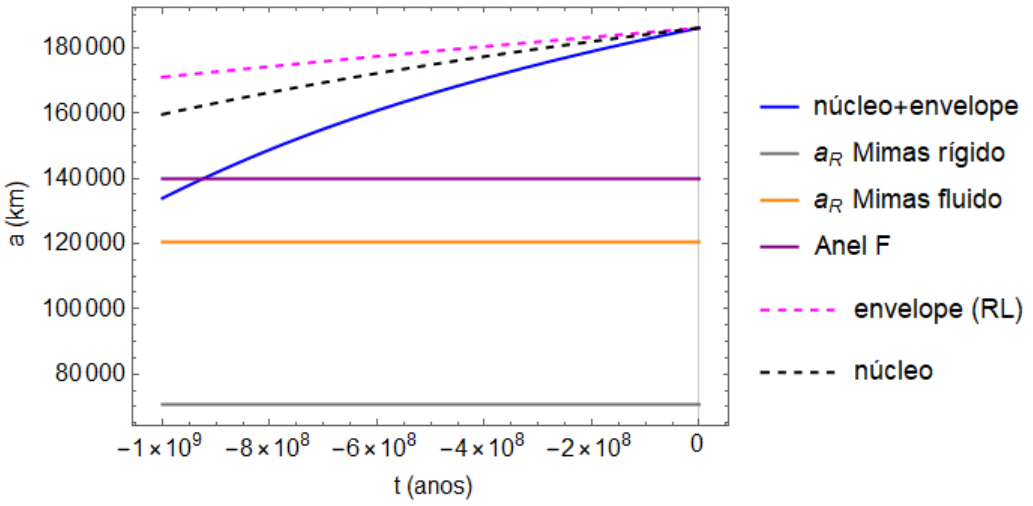


FIGURA 5.11. Variação do semi-eixo maior de Mimas no tempo para três casos diferentes: contribuição do núcleo e do envelope (curva azul), somente a contribuição do núcleo (curva tracejada preta) e somente a contribuição do envelope (curva tracejada rosa). Mimas ultrapassa o anel F de Saturno em $t \approx -10^9$ anos.

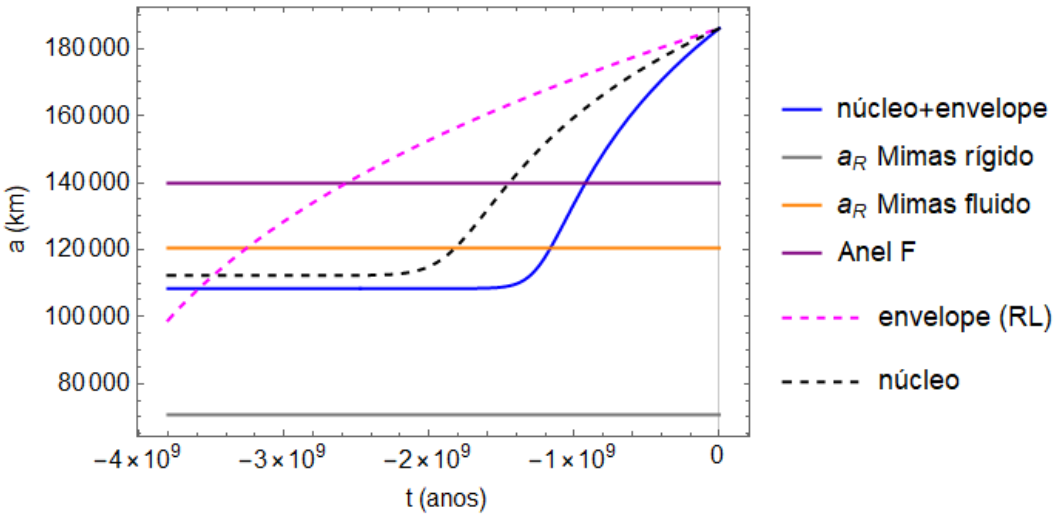


FIGURA 5.12. Variação do semi-eixo maior de Mimas em $t \approx -4 \times 10^9$ anos para três casos diferentes: contribuição do núcleo e do envelope (curva azul), somente a contribuição do núcleo (curva tracejada preta) e somente a contribuição do envelope (curva tracejada rosa). Integrando por um período maior de tempo conseguimos observar o sincronismo considerando somente a dissipação devido ao núcleo e as dissipações simultaneamente.

Concluímos então que nenhuma das três curvas alcança o limite de Roche assumindo que Mimas é um corpo rígido. O semi-eixo maior de Mimas devido à dissipação no envelope apresenta o menor valor dentre as três curvas em $t = -4 \times 10^9$ anos. A dissipação por maré devido às contribuições simultaneamente é a maior dentre as analisadas.

Neste capítulo discutimos os resultados obtidos para as variações do semi-eixo maior e excentricidade de Mimas devido à dissipação no núcleo de Saturno, em seu envelope e em ambos simultaneamente. A partir da análise do espaço de parâmetros

verificamos que a viscosidade do núcleo do planeta é a variável com maior influência na expansão orbital do satélite. Em vista disso, as variações do semi-eixo maior e excentricidade de Mimas devido à dissipação no núcleo de Saturno foram mais significativas quando comparadas com as variações dos mesmos elementos orbitais devido à dissipação no envelope de gás. Ao comparar as variações dos dois elementos orbitais considerando três valores distintos de η_c, notamos que a menor variação tanto do semi-eixo maior quanto da excentricidade estava relacionada com $\eta_c = 10^{16}$ Pa s. Analisando as contribuições das dissipações de cada camada de Saturno e de ambas simultaneamente, concluímos que, de fato, a dissipação no núcleo é superior à dissipação no envelope do planeta. Todavia, esta conclusão é válida para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s. Em suma, temos que a dissipação devido à soma das contribuições do núcleo e do envelope resulta na maior variação do semi-eixo maior de Mimas.

Capítulo 6

Extensão a outros satélites de Saturno

Neste capítulo aplicamos a metodologia descrita no capítulo 4 com o intuito de analisar a migração de outros sete satélites de Saturno: Enceladus, Tethys, Dione, Rhea, Titan, Hyperion e Iapetus. Todos são satélites regulares e, portanto, apresentam órbitas prógradas.

Selecionamos tais satélites devido ao ambiente de forte interação gravitacional entre eles e com o planeta e seus anéis. Todos os satélites evoluíram por maré passando por diversas ressonâncias de movimentos médios (RRM) até atualmente.

Consideramos que os sete satélites são homogêneos e rígidos, assim como Mimas. Logo, assumimos $\gamma \approx 10^{-11}$ s^{-1} (ou $\eta = 10^{17}$ Pa s) para todos. Foram descartadas as perturbações mútuas entre os satélites bem como com outros corpos. Os valores dos parâmetros utilizados são descritos pela Tabela 6.1.

Nossos objetivos são analisar como a viscosidade do núcleo de Saturno influencia na taxa de variação temporal dos semi-eixos, excentricidades e energias dos satélites internos, assim como a variação de seus semi-eixos devido à dissipação no núcleo do planeta, em seu envelope e devido às dissipações simultaneamente.

6.1 Satélites internos- Enceladus, Tethys e Dione

Mimas, Enceladus, Tethys e Dione fazem parte do sistema interno de satélites de Saturno. De diâmetro mediano e forma elipsoidal, estes satélites apresentam algumas

Tabela 6.1. Valores médios dos parâmetros referentes aos sete satélites de Saturno. Valores retirados de *Saturnian Satellite Fact Sheet* e de *JPL Solar System Dynamics*

Satélite	Massa (kg)	Raio (m)	a (m)	e
Enceladus	1,08 $\times 10^{20}$	252,1 $\times 10^{3}$	2,384 $\times 10^{8}$	0,005
Tethys	6,18 $\times$ 10^{20}	533 $\times 10^{3}$	2,950 $\times 10^{8}$	0,001
Dione	11 $\times 10^{20}$	562,7 $\times 10^{3}$	3,777 $\times 10^{8}$	0,002
Rhea	23,1 $\times 10^{20}$	764,3 $\times 10^{3}$	5,272 $\times 10^{8}$	0, 001
Titan	1345,5 $\times 10^{20}$	2574,7 $\times 10^{3}$	12,2190 $\times 10^{8}$	0,029
Hyperion	0,056 $\times 10^{20}$	135,0 $\times 10^{3}$	14,815 $\times 10^{8}$	0,0028
Iapetus	18,1 $\times 10^{20}$	735,6 $\times 10^{3}$	35,617 $\times 10^{8}$	0,105

características em consequência de evoluírem por maré. Enceladus apresenta uma superfície elipsoidal aproximadamente lisa. É o corpo mais reflexivo do Sistema Solar. Dessa maneira, a temperatura da superfície do satélite é de aproximadamente -201 ºC [1]. Assim como a Lua, Enceladus tem movimento síncrono, e portanto, apresenta a mesma face voltada para Saturno. Enceladus não é o único satélite a apresentar atividade geológica (Porco et al., 2006). Dione , que atualmente encontra-se em ressonância 2:1 com Enceladus, possui a superfície moldada pelas atividade tectônicas que atuam em si (Wagner et al., 2009). Assim como Enceladus, Dione também apresenta a mesma face voltada para Saturno por conta dos efeitos de maré no satélite. Por conta de sua evolução por maré, Tethys possui um sistema de fendas que se estende por boa parte de seu diâmetro, chamado de *Ithaca Chasma* (Hussmann et al., 2019). Além disso, como já foi mencionado, Tethys encontra-se atualmente em ressonância 4:2 com Mimas.

Utilizando a razão dissipativa k_2/Q, referente ao núcleo de Saturno, dada pela a equação 4.1 e inserindo-a em 4.10, obtemos $\dot{a}$ em função da viscosidade do núcleo de Saturno, como mostra a Figura 6.1. Em vista das equações utilizadas, estamos considerando somente a maré no planeta. Consideramos no gráfico a mesma faixa de valores de η_c da Figura 5.1 (10^{10} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{22}$). Ao analisar o possível intervalo de viscosidade para o núcleo de Saturno em relação à $\dot{a}$ de cada satélite, notamos que o valor de η_c referente ao pico de cada curva pode ser aproximado à $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. A reta preta tracejada indica $\eta_c = 10^{15}$ Pa s. Os valores de $\dot{a}$ para os quatro satélites não variam muito entre si. Contudo, Tethys apresenta o maior valor tanto para viscosidades menores quanto para maiores que $\eta_c = 10^{15}$ Pa s (linha tracejada).

Tomando a equação 4.1, inserindo-a em 2.78 obtemos $\dot{e}$ em função da viscosidade do núcleo de Saturno, de acordo com a Figura 6.2. Portanto, estamos considerando somente a maré no planeta. Consideramos no gráfico a mesma faixa de valores de η_c da Figura 5.1 e 6.1 (10^{10} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{22}$ Pa s). Notemos que $\dot{e}$ apresenta maior valor para Mimas, com o pico da curva próximo à $\dot{e} \sim 10^{-18}$ s^{-1}. Os valores máximos de $\dot{e}$

[1] *Enceladus-In Depth*

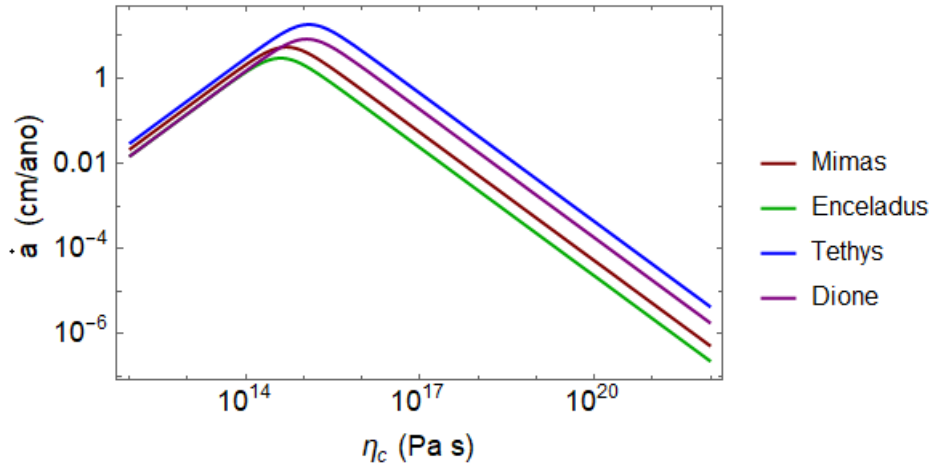


FIGURA 6.1. Gráfico para $\dot{a}$ dos satélites internos de Saturno em função da viscosidade do núcleo do planeta. Inserimos no gráfico um intervalo de 10^{10}Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{22}$ Pa s. Fixamos os principais parâmetros do núcleo em $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$.

para os quatro satélites estão associados à $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. Para $\eta_c > 10^{15}$ Pa s, Tethys e Dione apresentam os menores valores de $\dot{e}$.

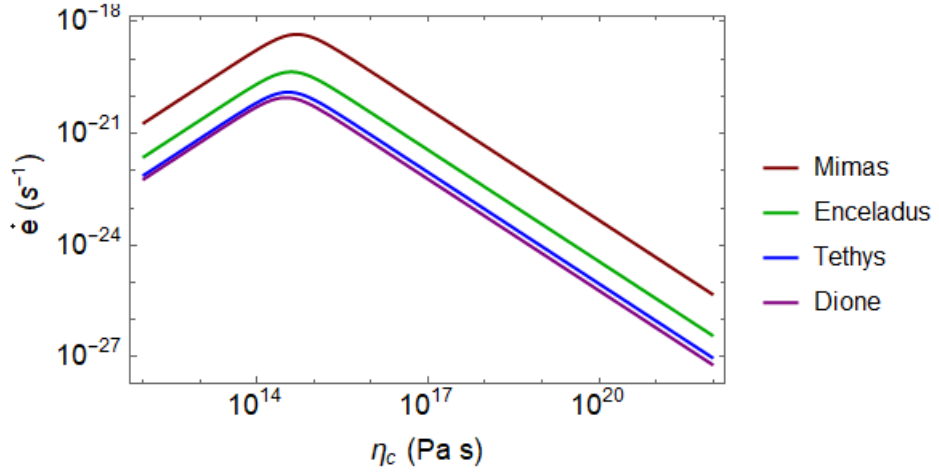


FIGURA 6.2. Gráfico para $\dot{e}$ dos satélites internos de Saturno em função da viscosidade do núcleo do planeta. Inserimos no gráfico um intervalo de 10^{10}Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{22}$ Pa s. Fixamos os principais parâmetros do núcleo em $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$.

Tomando novamente a equação 4.1 e inserindo-a em 2.79 obtemos $\dot{E}$ em função da viscosidade do núcleo de Saturno, como mostra a Figura 6.3. Portanto, estamos considerando somente a maré no planeta. Consideramos no gráfico a mesma faixa de valores de η_c da Figura 5.1 e 6.1 (10^{10} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{22}$ Pa s). Notemos que $\dot{E}$ apresenta maior valor para Mimas, com o pico da curva próximo a $\dot{E} \sim 10^{12}$ W. Os valores máximos de $\dot{E}$ para os quatro satélites compreendem um intervalo de viscosidade igual a 10^{14} Pa s $\lesssim \eta_c \lesssim 10^{15}$ Pa s.

As tabelas 6.2, 6.3 e 6.4 apresentam os valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ calculados a partir das equações 4.1 , 4.10, 2.79 e 2.79. Consideramos os três valores de η_c assumidos na

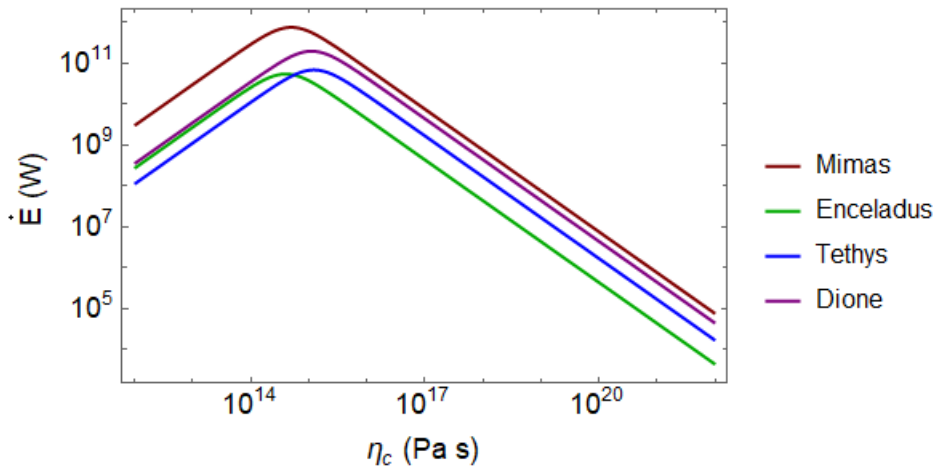


FIGURA 6.3. Gráfico para $\dot{E}$ dos satélites internos de Saturno em função da viscosidade do núcleo do planeta. Inserimos no gráfico um intervalo de 10^{10}Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{22}$ Pa s. Fixamos os principais parâmetros do núcleo em $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$.

análise realizada no capítulo 5. Comparando a taxa de variação temporal do semi-eixo dos três satélites, observamos que Dione é o satélite que apresenta a menor variação de $\dot{a}$ em função de η_c. O fato de Dione ser o satélite que apresenta a maior distância orbital, dentre os três, faz com que a maré devido ao núcleo de Saturno não tenha tanta influência sobre ele. Desconsiderar a RMM com Mimas pode ser uma explicação para Tethys apresentar os maiores valores de $\dot{a}$. Visto que tais valores se aproximam dos encontrados para Mimas (ver tabela 4.4). Em relação à tabela 6.3, notemos que para os valores de viscosidade considerados, não há variação significativa de $\dot{E}_E$, $\dot{E}_T$ e $\dot{E}_D$, quando comparados entre si. Considerando o valor $\eta_c = 10^{14}$ Pa s assumido em nossos resultados no capítulo 5, obtemos: $\dot{a}_D < \dot{a}_E < \dot{a}_T$ e $\dot{E}_T < \dot{E}_E < \dot{E}_D$. Como estamos utilizando somente a maré em Saturno na construção das Figuras 6.1, 6.2 e 6.3, bem como das tabelas 6.2, 6.3 e 6.4, os valores encontrados de $\dot{e}$ para todos os três satélites assemelham-se aos encontrados para Mimas. Considerando novamente que $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, obtemos a partir da tabela 6.4: $\dot{e}_T < \dot{e}_D < \dot{e}_E$.

As tabelas e Figuras desta seção reforçam a conclusão obtida de que a maré no planeta comanda a migração dos satélites. Isso pode ser observado comparando as tabelas 6.2 e 6.5. Considerando a maré nos satélites, $\dot{a} < 1$ cm/ano para todos. Todavia, os maiores valores de $\dot{e}$ foram encontrados considerando a maré no satélite e os menores considerando a maré em Saturno (ver tabelas 6.3 e 6.6).

Utilizando as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112, construímos gráficos que apresentem a variação de $\dot{a}$, $\dot{e}$, $\dot{E}$ de cada satélite em função de suas viscosidades, como mostram as Figuras 6.4, 6.5 e 6.7. As equações estão associadas à maré em cada satélite.

Tomando o mesmo intervalo de viscosidade utilizado para Mimas, 10^{15} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{18}$ Pa s, $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ diminuem conforme a viscosidade dos satélites aumenta. A Figura

Tabela 6.2. Valores de $\dot{a}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s para Enceladus ($\dot{a}_E$), Tethys ($\dot{a}_T$) e Dione ($\dot{a}_D$). Os valores foram calculados inserindo a equação 4.1 em 4.10.

η_c (Pa s)	$\dot{a}_E$ (cm/ano)	$\dot{a}_T$ (cm/ano)	$\dot{a}_D$ (cm/ano)
10^{14}	1,340	2,634	1,298
10^{15}	1,974	3,179	1,350
10^{16}	0,229	0,357	0,149

Tabela 6.3. Valores de $\dot{e}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s para Enceladus ($\dot{e}_E$), Tethys ($\dot{e}_T$) e Dione ($\dot{e}_D$). Consideramos somente a maré em Saturno, portanto os valores foram calculados inserindo a equação 4.1 em 2.73.

η_c (Pa s)	$\dot{e}_E$ (s^{-1})	$\dot{e}_T$ (s^{-1})	$\dot{e}_D$ (s^{-1})
10^{14}	2,118 $\times 10^{-20}$	6,727 $\times 10^{-21}$	5,178 $\times 10^{-21}$
10^{15}	3,120 $\times 10^{-20}$	8,118 $\times 10^{-21}$	5,386 $\times 10^{-21}$
10^{16}	3,618 $\times 10^{-21}$	9,128 $\times 10^{-22}$	5,945 $\times 10^{-22}$

Tabela 6.4. Valores de $\dot{E}$ referentes ao intervalo de viscosidade 10^{14} Pa s $\leq \eta_c \leq 10^{16}$ Pa s para Enceladus ($\dot{E}_E$), Tethys ($\dot{E}_T$) e Dione ($\dot{E}_D$). Consideramos somente a maré em Saturno, portanto s valores foram calculados inserindo a equação 4.1 em 2.79.

η_c (Pa s)	$\dot{E}_E$ (W)	$\dot{E}_T$ (W)	$\dot{E}_D$ (W)
10^{14}	-2,53 $\times 10^{10}$	-1,02 $\times 10^{10}$	-3,176 $\times 10^{10}$
10^{15}	-1,236 $\times 10^{10}$	-3,730 $\times 10^{10}$	-3,330 $\times 10^{10}$
10^{16}	-4,325 $\times 10^{9}$	-1,390 $\times 10^{9}$	-3,646 $\times 10^{9}$

6.4 apresenta as taxas de variação temporal do semi-eixo, excentricidade e energia para Enceladus. O valor máximo de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ ocorre quando $\eta_c \approx 10^{12}$ Pa s. Para Tethys, os picos dos gráficos estão associados à $\eta_c = 10^{12}$ Pa s, como mostra a Figura 6.5. Na Figura 6.7 é possível observar que os valores máximos de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ ocorrem quando $\eta_c \approx 10^{13}$ Pa s para Dione.

As tabelas 6.5, 6.6 e 6.7 foram construídas utilizando as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112. Consideramos o mesmo intervalo de viscosidade utilizado na tabela 4.5. Todos os valores foram descritos em ordem de potência. Comparando os resultados das tabelas mencionadas, notamos que Tethys apresenta os menores valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$. Assumindo que a viscosidade de todos os satélites é igual a 10^{17} Pa s, Tethys, de fato, dissipa menos energia dentre os três. Enceladus e Dione dissipam a mesma quantidade de energia de Mimas, menos de 10^9 W. É válido mencionar que como estamos trabalhando com aproximações, nossos resultado diferem dos encontrados na literatura (Folonier et al., 2018).

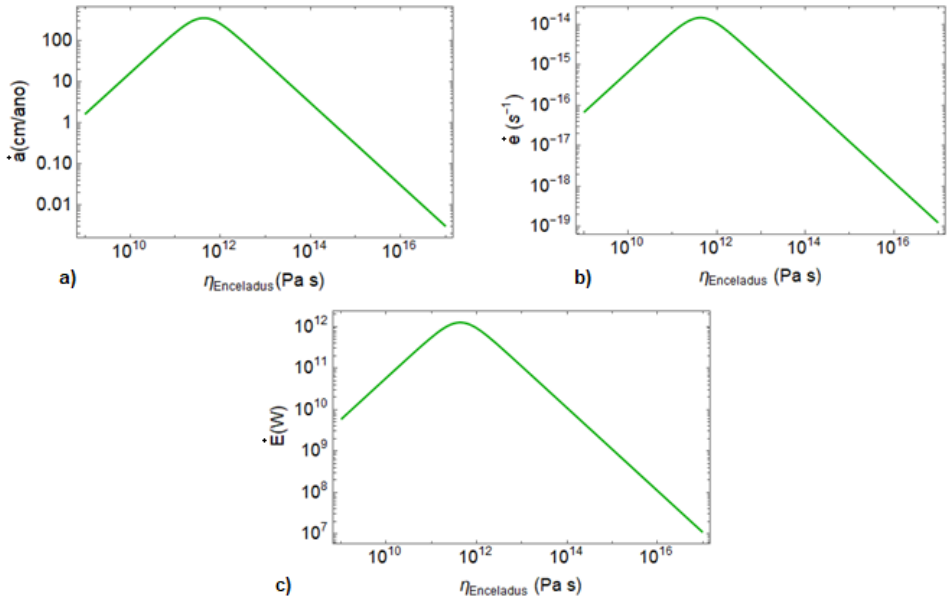


FIGURA 6.4. Taxa de variação temporal do semi-eixo **a)**, da excentricidade **b)** e da energia **c)** de Enceladus em função de sua viscosidade. Para as construções dos gráficos foram utilizadas as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

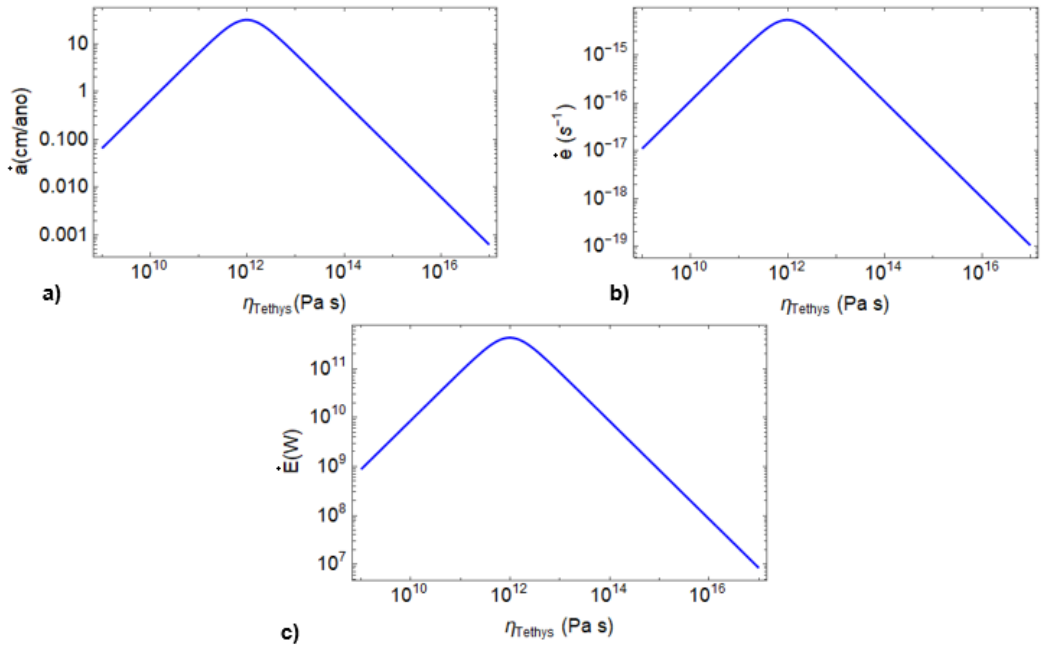


FIGURA 6.5. Taxa de variação temporal do semi-eixo **a)**, da excentricidade **b)** e da energia **c)** de Tethys em função de sua viscosidade. Para as construções dos gráficos foram utilizadas as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

6.2 Analisando a expansão orbital dos satélites devido à dissipação por maré

Nesta seção acrescentamos mais quatro satélites de Saturno: Rhea, Titan, Hyperion e Iapetus.Não realizaremos a análise anterior em relação a $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ considerando a

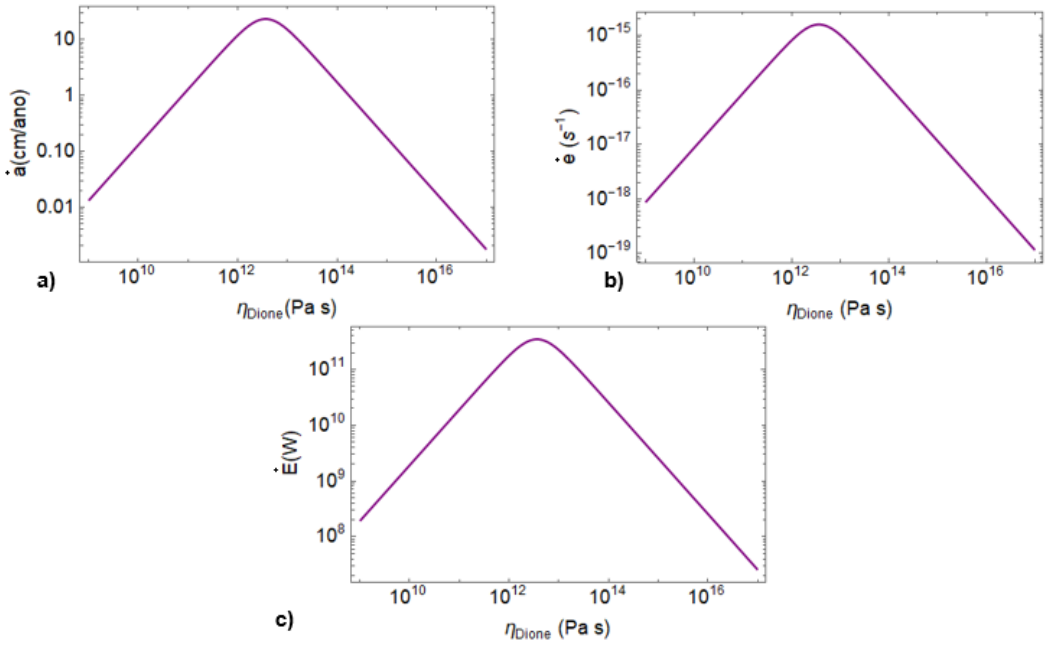


FIGURA 6.6. Taxa de variação temporal do semi-eixo **a)**, da excentricidade **b)** e da energia **c)** de Dione em função de sua viscosidade. Para as construções dos gráficos foram utilizadas as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

TABELA 6.5. Valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ para Enceladus em função de sua viscosidade. Os valores foram calculados utilizando as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

$\eta_{\text{Enceladus}}$ (kg/m^3)	$-\dot{a}$ (cm/ano)	$-\dot{e}$ (s^{-1})	$-\dot{E}$ (W)
10^{15}	10^{-1}	10^{-17}	10^{9}
10^{16}	10^{-2}	10^{-18}	10^{8}
10^{17}	10^{-3}	10^{-19}	10^{7}
10^{18}	10^{-4}	10^{-20}	10^{6}

TABELA 6.6. Valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ para Tethys em função de sua viscosidade. Os valores foram calculados utilizando as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

η_{Tethys} (kg/m^3)	$-\dot{a}$ (cm/ano)	$-\dot{e}$ (s^{-1})	$-\dot{E}$ (W)
10^{15}	10^{-2}	10^{-17}	10^{8}
10^{16}	10^{-3}	10^{-18}	10^{7}
10^{17}	10^{-4}	10^{-19}	10^{6}
10^{18}	10^{-5}	10^{-20}	10^{5}

TABELA 6.7. Valores de $\dot{a}$, $\dot{e}$ e $\dot{E}$ para Dione em função de sua viscosidade. Os valores foram calculados utilizando as equações 2.81, 2.82, 2.108, 2.110 e 2.112.

η_{Dione} (kg/m^3)	$-\dot{a}$ (cm/ano)	$-\dot{e}$ (s^{-1})	$-\dot{E}$ (W)
10^{15}	10^{-1}	10^{-17}	10^{9}
10^{16}	10^{-2}	10^{-18}	10^{8}
10^{17}	10^{-3}	10^{-19}	10^{7}
10^{18}	10^{-4}	10^{-20}	10^{6}

maré no planeta e também nos satélites, pois são satélites de dimensões maiores e mais afastados. Nosso objetivo é analisar a migração de todos os sete satélites, juntamente com Mimas, devido à dissipação por maré em Saturno. Fixamos durante toda a seção os principais parâmetros em $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1} ($\eta_{\text{satélite}} = 10^{17}$ Pa s).

Titan é o maior satélite de Saturno e o segundo maior do Sistema Solar, maior até que o planeta Mercúrio. Além da Terra, a missão Cassini verificou que Titan possui mares em sua superfície[2]. Atualmente está em RMM 4:3 com Hyperion (Polycarpe et al., 2018), satélite vizinho de Titan com diâmetro menor do que o de Mimas. Iapetus é o terceiro maior satélite de Saturno e com o maior semi-eixo dentre os demais satélites mencionados nesta seção. Dentre os oito satélites mencionados neste capítulo, seis estão estão evoluindo em RMM.

Utilizando o mecanismo do RL, tomamos a equação 4.6 e substituímos em 4.9 e 4.10. Integramos acopladamente com a equação 4.11 em $t = -3{,}9 \times 10^9$ anos. Consideramos $B = 1/3$ para todos os satélites. Utilizando os dados da tabela 6.1 obtemos a expansão orbital para cada um dos oito satélites (Mimas, Enceladus, Tethys, Dione, Rhea, Titan, Hyperion e Iapetus).

A Figura 6.7 apresenta a variação do semi-eixo dos satélites em t = -3,9 $\times$ 10^9 anos devido à dissipação no envelope. O semi-eixo está descrito em unidades do raio de Saturno (ver tabela 4.2) e a linha tracejada indica a posição do anel F do planeta. O gráfico menor representa uma ampliação da migração dos satélites internos. Notamos então que Mimas, Enceladus, Tethys e Dione obtiveram pouca variação em seus semi-eixos. No entanto, os satélites que encontram-se mais afastados de Saturno apresentam uma variação mais significativa do semi-eixo. É válido ressaltar novamente que estamos analisando a variação Δa. Todavia, a equação 4.6 descreve $Q(t)$ sendo inversamente proporcional ao semi-eixo do satélite. Portanto, quanto maior o semi-eixo, menor será o fator dissipativo Q do envelope de Saturno. Consequentemente, $\dot{a}$ e $\dot{E}$ possuíram valores significativos para os satélites externos em comparação com os internos. Em t = -3,9 $\times$ 10^9 anos, notamos que Hyperion migrou cerca de 17 R_s (ou 1024556 km), Titan migrou cerca de 8 R_s (ou 482144 km) e Iapetus cerca de 35 R_s (ou 2109380 km). Em torno de t = -3,5 $\times$ 10^9 anos ocorre um cruzamento orbital entre Hyperion e Titan. Desconsiderar, neste estudo, que os satélites evoluem em RMMM pode ser uma explicação para a ocorrência desse cruzamento. Da mesma maneira que concluímos para Mimas, o mecanismo do RL suaviza a migração dos satélites, tornando-a mais lenta, em comparação com a dissipação no núcleo de Saturno.

[2]Cassini Explores a Methane Sea on Titan

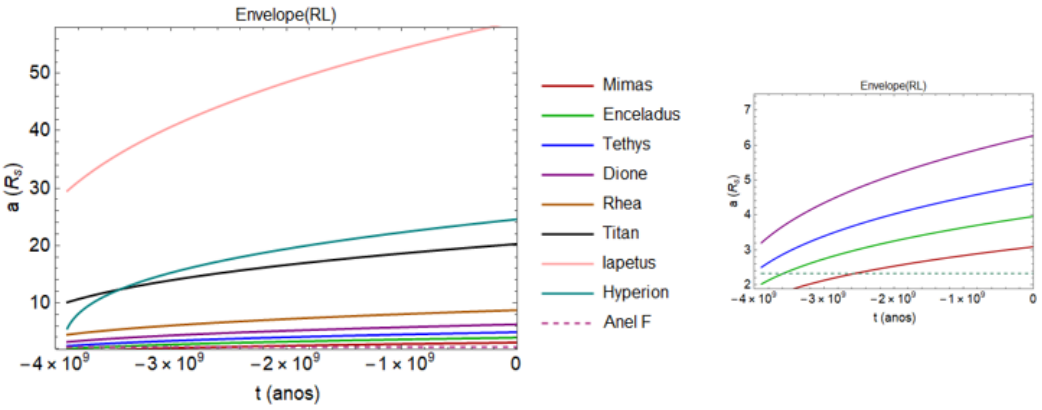


FIGURA 6.7. Variação do semi-eixo de oito satélites de Saturno em t = -3,9 $\times 10^9$ considerando somente a dissipação no envelope. Consideramos $B = 1/3$ para todos. Fixamos os principais parâmetros em $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1}. O gráfico menor, à direita, apresenta a ampliação da migração dos satélites internos de Saturno. O anel F de Saturno se mantém como a reta tracejada nos dois gráficos.

Tomando a equação 4.1, inserindo em 4.9 e 4.10 e integrando juntamente com a equação 4.11, obtemos a expansão orbital dos satélites devido à dissipação no núcleo de Saturno. O semi-eixo está descrito em função do raio de Saturno (ver tabela 4.2) e a linha tracejada indica a posição do anel F do planeta. O gráfico menor à direita apresenta a ampliação da migração dos satélites internos. Notamos uma alteração considerável no comportamento das curvas para as variações do semi-eixo, em comparação com a dissipação no envelope. A migração dos satélites internos tende a ser mais relevante. Tethys e Dione apresentam uma rápida expansão, ultrapassando o anel F em $t \approx$ 1,4$\times 10^9$ anos e $t \approx$ -3,5 $\times$ 10^9 , respectivamente. Observamos que ocorre um cruzamento entre Mimas e Tethys em $t \approx$ -1,4 $\times$ 10^9 anos e posteriormente entre Tethys e Enceladus em $t \approx$ -1,2 $\times$ 10^9 anos. A migração dos satélites externos é praticamente nula. Isso ocorre em razão destes satélites estarem distantes de Saturno. A partir da equação 4.10 notamos que $\dot{a} \sim 1/a^3$, portanto quanto maior o semi-eixo menor será o valor de $\dot{a}$.

A Figura 6.9 foi obtida somando as equações 4.1 e 4.6 e inserindo-as em 4.9. Integramos em t = -3,9 $\times 10^9$ anos juntamente com a equação 4.11. O semi-eixo está descrito em função do raio de Saturno (ver tabela 4.2) e a linha tracejada indica a posição do anel F do planeta. O gráfico menor à direita apresenta a ampliação da migração dos satélites internos. Para as contribuições das dissipações no núcleo e no envelope simultaneamente verificamos que a migração dos satélites externos é comandada pelo RL, visto que na Figura 6.7, a dissipação no núcleo não apresentava nenhuma influência significativa na expansão orbital desses satélites. Contudo para os satélites internos, a relevância do núcleo é notória. Notamos que, do passado para o presente, Mimas, Enceladus, Tethys e Dione ultrapassam o anel F mais rapidamente do que considerando somente a dissipação no núcleo. Apenas o cruzamento de Tethys com Enceladus permanece. Isso se dá devido à influência da dissipação no núcleo nos satélites internos. Os satélites ultrapassam o

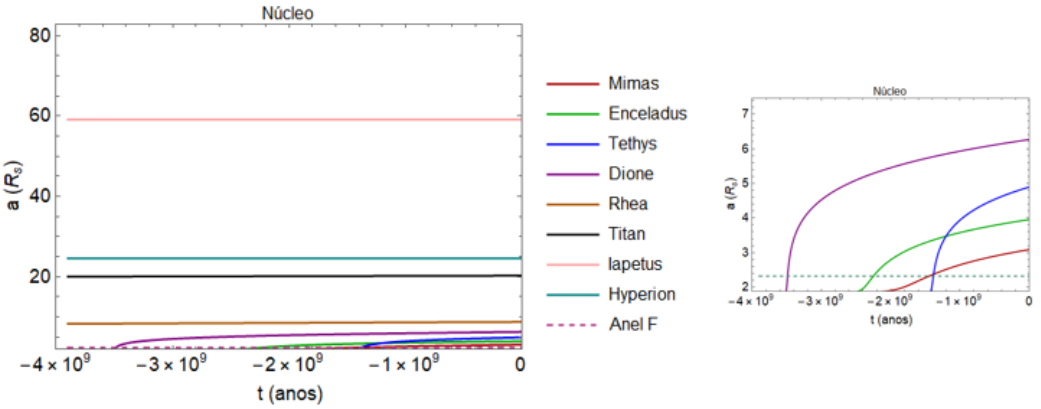


FIGURA 6.8. Variação do semi-eixo dos satélites principais de Saturno em t = -3,9 $\times$ 10^9 considerando somente a dissipação no núcleo do planeta. Consideramos $B = 1/3$ para todos. Fixamos os principais parâmetros em $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1}. O gráfico menor, à direita, apresenta a ampliação da migração dos satélites internos de Saturno. O anel F de Saturno se mantém como a reta tracejada nos dois gráficos.

anel F em torno de $t \approx -3 \times 10^9$ e $t \approx$ -3,9 $\times$ 10^9 anos. Em relação aos satélites externos, observamos que o cruzamento das órbitas de Hyperion e Titan não ocorre, uma vez que as variações dos semi-eixos dos satélites devido à dissipação no núcleo são quase nulas. Em torno de $t \approx -3,8 \times 10^9$ anos, Hyperion e Titan migram muito próximos. A expansão orbital dos satélites ocorre de maneira consideravelmente rápida, com Titan migrando $\approx 10R_s$ em cerca de $t = -0,5 \times 10^9$ anos e Hyperion $\approx 10R_s$ em $t = -0,3 \times 10^9$ anos. Essa rápida expansão de Titan é devido ao RL. Para observar este comportamento na Figura 6.5 seria necessário integrarmos as equações por um período maior de tempo. Entretanto, t = -3,9 $\times$ 10^9 foi a escala de tempo máxima que o programa conseguiu nos fornecer a variação do semi-eixo de todos os satélites. Nenhuma influência do núcleo foi observada em Iapetus, visto que a variação do seu semi-eixo permanece a mesma da Figura 6.3.

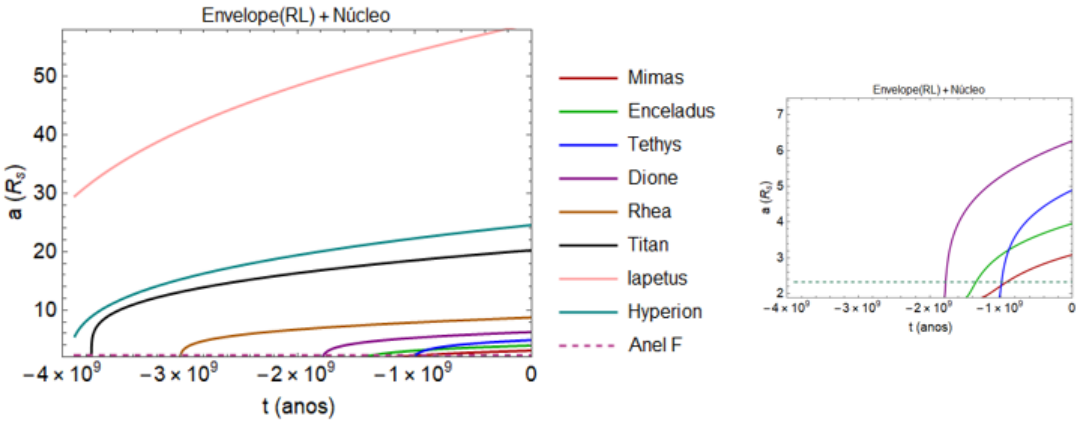


FIGURA 6.9. Variação do semi-eixo dos satélites principais de Saturno em t = -3,9$\times$$10^9$ considerando as duas contribuições de dissipação do planeta. Consideramos $B = 1/3$ para todos. Fixamos os principais parâmetros em $\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\mu_c = 10^{11}$ Pa, $R_c = 0,219R_s$ e $\gamma = 10^{-11}$ s^{-1}. O gráfico menor, à direita, apresenta a ampliação da migração dos satélites internos de Saturno. O anel F de Saturno se mantém como a reta tracejada nos dois gráficos.

Neste capítulo realizamos uma breve análise comparando as taxas de variação do semi-eixo e energia dos satélites internos Enceladus, Tethys e Dione. Em relação a $\dot{a}$ em função de η_c, observamos que o máximo valor de $\dot{a}$ para os satélites está associado a uma viscosidade $\eta_c \approx 10^{15}$ Pa s. Em relação à dissipação de energia em função da viscosidade do núcleo de Saturno, Mimas é o satélite que apresenta maior valor de $\dot{E}$. Isso é concluído visivelmente a partir da Figura 6.2. Em relação à migração de todos os oito satélites, concluímos que a dissipação no envelope faz com que todos migrem de maneira mais lenta. Além disso, o RL apresenta maior influência nos satélites externos em comparação com os internos. Já a dissipação no núcleo tem maior influência nos satélites internos, visto que estão mais próximos do planeta. Considerando as dissipações simultaneamente, foi possível observar que Mimas, Enceladus, Tethys e Dione ultrapassam o anel F em uma escala de tempo menor do que para as contribuições separadamente.

Capítulo 7

Discussão e Conclusão

Neste trabalho investigamos a expansão orbital de Mimas devido à dissipação por maré em Saturno. Assumimos que Mimas é um corpo homogêneo e Saturno um corpo formado por um núcleo sólido rodeado por um envelope gasoso. Ambos fazendo parte de um sistema sem nenhuma ação perturbativa externa. No capítulo 5 foram apresentados diversos gráficos para as variações do semi-eixo e excentricidade de Mimas em relação às contribuições das dissipações no núcleo e no envelope separadamente e simultaneamente.

Também, foi utilizada a metodologia do capitulo 4 no estudo de outros sete satélites de Saturno. Apresentamos gráficos similares aos de Mimas e comparamos como cada camada de Saturno influencia na migração dos satélites.

7.1 Metodologia e parâmetros utilizados

Pouco se sabe com precisão sobre o interior de Mimas e Saturno. Por conta disso foi preciso fazer algumas considerações e aproximações em relação aos valores dos parâmetros utilizados neste trabalho. Na literatura, normalmente, são realizados testes para definir intervalos de valores de viscosidade dos dois corpos. Entretanto, nenhum dos trabalhos mencionados neste estudo apresenta a viscosidade do envelope gasoso de Saturno e nem a viscosidade de Mimas com precisão. Os valores apresentados aqui foram alcançados a partir de uma série de testes comparando os resultados obtidos com resultados observados.

Para a viscosidade de Mimas foram considerados valores próximos de $\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{16}$ Pa s ($\gamma \sim 10^{-9}$ s^{-1}) (Folonier et al., 2018). Tomamos quatro valores para a viscosidade de Mimas: 10^{15} Pa s, 10^{16} Pa s, 10^{15} Pa s e 10^{15} Pa s. Ao calcular o fator de relaxação para os quatro valores de η_{Mimas} citados, notamos que $\gamma \sim 10^{-9}$ s^{-1}, valor

assumido por Folonier et al. (2018), corresponde a $\eta_{\text{Mimas}} \sim 10^{15}$ Pa s. Ao analisar como a excentricidade varia em relação à $\gamma \sim 10^{-9}$ s^{-1}, $\gamma \sim 10^{-10}$ s^{-1}, $\gamma \sim 10^{-11} s^{-1}$ e $\gamma \sim 10^{-12}$ s^{-1} verificamos algumas inconsistências com nossas referências e acabamos por descartar os dois primeiros valores de γ. Encontramos que valores pequenos para γ ($\gamma \sim 10^{-9}$ s^{-1} e $\gamma \sim 10^{-10}$) resultam em $e \sim 1$ em $t = -10^9$ anos. Por uma questão de escolha foi utilizado $\gamma \sim 10^{-11}$ s^{-1} durante todo o estudo. Utilizar $\gamma \sim 10^{-12}$ s^{-1} não altera os resultados apresentados no capítulo 5.

Para a viscosidade do núcleo de Saturno foram analisados três valores de acordo com os resultados obtidos por Remus et al. (2012, 2014). Determinamos $\eta_c = 10^{14}$ Pa s como um valor usual de viscosidade para a análise das variações do semi-eixo e excentricidade de Mimas, pois este valor apresentava uma variação condizente com o encontrado na literatura até o momento ($\Delta a \approx 1,98$ cm/ano) (Shoji & Hussmann, 2017).

Em relação as equações utilizadas nas variações do semi-eixo e excentricidade de Mimas, realizamos uma análise com o objetivo de determinar onde (no planeta ou no satélite) a maré dominava a evolução orbital de Mimas. A partir da razão das equações 2.110 e 2.77, que descrevem as taxas de variação no tempo do semi-eixo devido à maré em Mimas e devido a maré em Saturno, respectivamente, concluímos que $\dot{a}_{\text{Saturno}} \gg \dot{a}_{\text{Mimas}}$, como mostra a Figura 4.4. Portanto, a maré no planeta é a responsável pela variação do semi-eixo do satélite. Tomando a razão das equações 2.112 e 2.78, que descrevem as taxas de variação no tempo da excentricidade devido à maré em Mimas e devido à maré em Saturno, respectivamente, concluímos que $\dot{e}_{\text{Mimas}} \gg \dot{e}_{\text{Saturno}}$, como mostra a Figura 4.5. Por conseguinte, a maré em Mimas é a responsável pela variação da excentricidade do satélite.

Como trabalhamos com muitos parâmetros livres foi necessário analisar a influência dos mesmos na migração de Mimas. Em relação ao núcleo de Saturno, a viscosidade, η_c, e a rigidez, μ_c, apresentaram maior influência na migração de Mimas, sendo η_c o parâmetro dominante em comparação com os demais. Em relação à Mimas, γ influencia apenas na variação da excentricidade do satélite, visto que ele se encontra apenas nas equações para a maré em Mimas. Lembrando que para analisar a variação do semi-eixo, utilizamos $\dot{a}$ devido à maré em Saturno.

Considerando modelos utilizados para cada corpo, é sabido que o modelo de fluência (*creep*) abrange corpos do tipo de Saturno. Todavia, considerar esta teoria para corpos de duas camadas faz com que seja necessário aproximar $\gamma_{\text{núcleo}} \approx \gamma_{\text{envelope}} \approx \gamma_{\text{Saturno}}$ (Folonier & Ferraz-Mello, 2017; Ferraz-Mello et al., 2022). O que requer um estudo mais aprofundado em relação ao tema e uma gama maior de aproximações. Foi escolhido o modelo clássico para Saturno, pois há uma série de referências literárias com

as quais podemos comparar os resultados obtidos neste trabalho. O objetivo também foi comparar o uso dos modelos em cada corpo. Só foi possível utilizar o modelo *creep* em Mimas por conta da sua baixa excentricidade. No entanto, para resultados mais realísticos a utilização do modelo de fluência em ambos os corpos não deve ser descartada. Trabalhos como os de Tajeddine et al. (2014) e Rhoden & Walker (2022) propõem que Mimas apresenta um oceano subsuperficial, podendo ser composto de mais de duas camadas.

Em relação ao fator Q de Saturno, consideramos que seu valor varia de acordo com o tempo para ambas as camadas. Um valor pequeno de Q significa que uma grande quantidade de energia é dissipada em Saturno. Lainey et al. (2017) encontraram um valor de Q bem abaixo em comparação com o valor conhecido de Goldreich & Soter (1966). Todavia, se inserido um valor bem inferior para Q (≈ 2500), Mimas adentraria o limite de Roche em alguns bilhões de anos, pois sua expansão orbital seria mais rápida. Isso acaba contradizendo alguns modelos de formação para o satélite (Schmedemann & Neukum, 2011). O fato mencionado acima pode ser observado através da Figura 7.1. Inserindo $Q \approx 25000$ nas equações 4.9 e 4.10, e integrando com a equação 4.11 em alguns milhões de anos, encontraremos que Mimas ultrapassaria seu limite de Roche fluido em aproximadamente $t \approx -5 \times 10^8$ anos (ver Figura 7.1). A tendência é que o satélite também ultrapasse seu limite de Roche rígido em uma escala de tempo muito menor do que considerando que o fator Q varie no tempo (ver Figuras 5.10 e 5.11). Este resultado não corrobora com alguns modelos de formação (Schmedemann & Neukum, 2011). Desta maneira existem então duas possibilidades: Mimas não se formou junto com Saturno ou o fator dissipativo Q de Saturno não é constante. Canup (2010) e Charnoz et al. (2011) apontam que Mimas tenha se formado a partir dos anéis de Saturno (assim como outros satélites medianos do planeta) e portanto, sua formação seria mais recente. Esse cenário de Mimas sendo mais jovem não se sustenta por conta da idade de algumas de suas crateras (Schmedemann & Neukum, 2011). Todavia, considerar que o valor do fator Q era mais alto no passado e que atualmente seja da ordem de $\sim 10^3$ significa que, inicialmente, a expansão orbital do satélite era mais rápida e tornou-se mais lenta. Sendo assim, Mimas poderia sim ter se formado com Saturno. Desse modo, considerar que o fator dissipativo Q de Saturno varia em função do tempo é mais sustentável.

7.2 Expansão orbital de Mimas

Analisando os resultados obtidos para a dissipação por maré no núcleo de Saturno, notamos que tanto a variação do semi-eixo quanto a da excentricidade são superiores em comparação com a dissipação no envelope, de acordo com as Figuras 5.10 e 5.11.

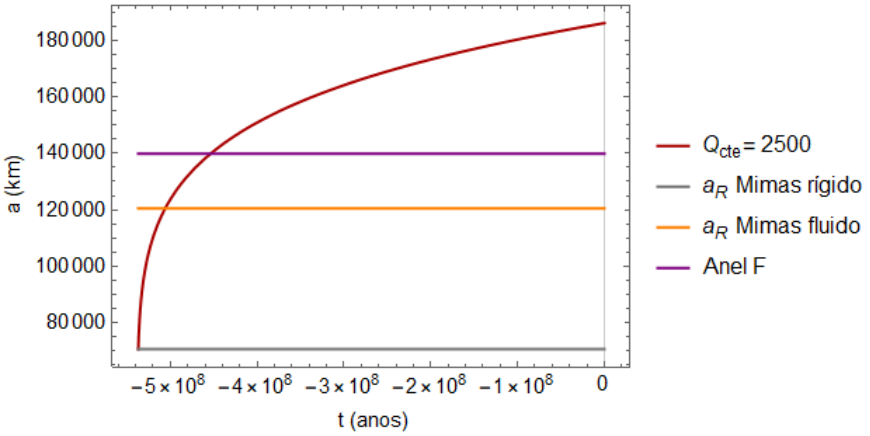


FIGURA 7.1. Variação do semi-eixo de Mimas considerando Q_{cte} =2500 (Lainey et al., 2017). Integramos as equações 4.9, 4.10 e 4.11 em $t = 5{,}35 \times 10^8$ anos. Consideramos novamente as três posição fixadas das Figuras 5.10 e 5.11.

O semi-eixo e excentricidade de Mimas variam cerca de 10000 km e 0,002998 a mais, respectivamente, devido à dissipação no núcleo. Retornando a análise para os três valores de viscosidades trabalhados ($\eta_c = 10^{14}$ Pa s, $\eta_c = 10^{15}$ Pa s e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s), observamos que aumentando o valor da viscosidade do núcleo, a variação do semi-eixo maior de Mimas diminui. A variação máxima do semi-eixo ocorre quando $\eta_c = 10^{15}$ Pa s, como foi apresentado nas Figuras 5.1 e 5.10. Este comportamento se estende ao analisar a variação da excentricidade.

Dependendo do valor atribuído à η_c ocorre a mudança do modelo utilizado. Sendo assim, para valores abaixo de $\eta_c = 10^{15}$ Pa s o núcleo se comporta como um fluido e o modelo clássico (ou de *Darwin*) é aplicado. Já para valores acima de $\eta_c = 10^{15}$ Pa s, o núcleo se comporta como um sólido viscoelástico e o modelo de fluência *creep* é aplicado. O modelo *creep* é semelhante ao modelo de *Maxwell* dentro da reologia, pois ambos trabalham com a viscosidade, sendo ela o parâmetro de relevância (Ferraz-Mello, 2015).

O fator Q do núcleo de Saturno é dependente de η_c. Utilizando $\eta_c = 10^{14}$ Pa s e comparando o fator Q variando no tempo com o mesmo sendo constante, encontramos que o semi-eixo de Mimas apresenta uma variação maior quando o valor de Q é constante. Isso porque, inicialmente ($\approx 10^9$ anos), Q variável deveria ser superior a Q constante.

Em relação à dissipação no envelope foi concluído que as variações do semi-eixo e excentricidade são inferiores às referentes ao núcleo de Saturno, como exibem as Figuras 5.3 e 5.3. A dissipação no envelope, utilizando o mecanismo do *resonance locking* (*RL*), depende apenas de um único parâmetro relacionado às camadas de Saturno, o parâmetro B, o qual está associado às taxas de frequências as quais as ondas inerciais no envelope de Saturno estão evoluindo. Ao diminuir o valor de B, notamos uma rápida expansão

durante a formação do satélite. Quanto menor for o valor de B, mais rápida é a migração de Mimas. É válido ressaltar que consideramos que o mecanismo do RL atua durante toda a evolução orbital do satélite. Como trata-se de uma teoria recente (ver Fuller et al. (2016) e Lainey et al. (2020)), é necessário um estudo mais detalhado do tema.

Ao analisar como o fator $Q(t)$ para o envelope de Saturno varia de acordo com o semi-eixo de Mimas, verificamos que $Q(t)$ diminui seu valor conforme o semi-eixo aumenta. Neste caso, o fator $Q(t)$ do envelope depende do semi-eixo eixo de Mimas. Para $a = 186000$ km, $Q(t) \approx 8800$.

Analisando a variação do semi-eixo utilizando as duas contribuições de dissipação em conjunto, nota-se que η_c é, de fato, o parâmetro dominante na evolução orbital de Mimas, uma vez que as maiores variações de semi-eixo e excentricidade estão relacionadas à η_c.

Para o valor usual de viscosidade (10^{14} Pa s) escolhida verificamos que Mimas ultrapassa o anel F em aproximadamente -10^9 anos, como é apresentado pela Figura 5.10. Concluímos que a dissipação do núcleo de Saturno domina a evolução orbital de Mimas fazendo com que o satélite ultrapasse tanto o anel F, quanto o limite de Roche pressupondo que Mimas é um corpo fluido. Cerca de $-2,5 \times 10^9$ anos, Mimas ultrapassa o anel F e 10^9 anos depois o satélite ultrapassa seu limite de Roche fluido. Todavia esta conclusão só é válida para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s.

Na Figura 7.2 somamos a equação 4.1 com a 4.6 e inserimos em 4.9 e 4.10. Integrando ambas equações juntamente com a equação 4.11 obtemos o gráfico da variação do semi-eixo de Mimas considerando $B = 1/3$ em $t = -4 \times 10^9$ anos. Tomando, por exemplo, $\eta_c = 10^{13}$ Pa s e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s obtêm-se que a dissipação no envelope domina a migração de Mimas. Para $\eta_c = 10^{13}$ Pa s a variação do semi-eixo associada à dissipação no núcleo é de aproximadamente 6000 km em $t = -4 \times 10^9$ anos, resultando em $0,15$ cm/ano. Considerando somente a contribuição do núcleo, Mimas não ultrapassa o anel F e nenhum dos limites de Roche para este valor de η_c. Tendo em vista as duas contribuições, verifica-se que Mimas ultrapassa o anel F em aproximadamente $t = -2 \times 10^9$ anos, -10^9 anos a mais do que para $\eta_c = 10^{14}$ Pa s. Observando a variação do semi-eixo associada somente à contribuição do núcleo com $\eta_c = 10^{16}$ Pa s, Mimas não ultrapassa nenhuma das posições fixadas. Considerando a curva para as duas contribuições, nota-se que Mimas ultrapassa tanto o anel F, quanto o limite de Roche Fluido em torno de $t = -1,5 \times 10^9$ anos atingindo a órbita síncrona logo após.

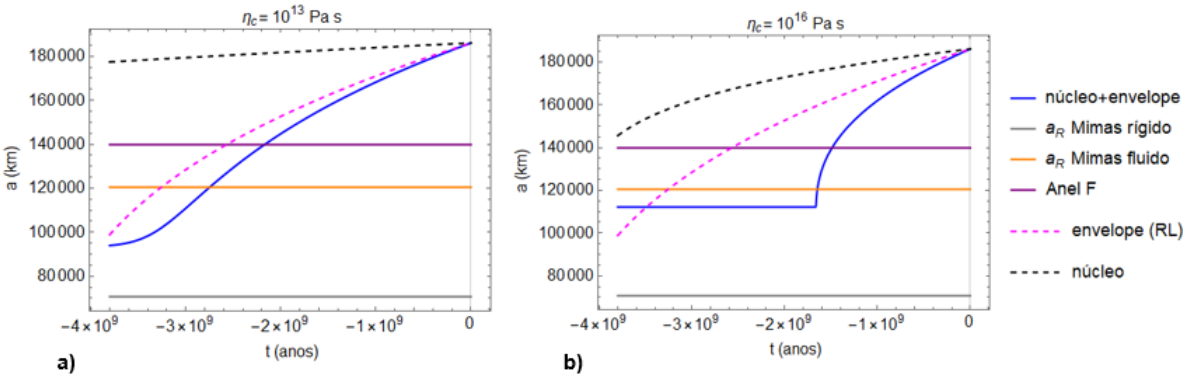


FIGURA 7.2. Variação do semi-eixo de Mimas no tempo para três casos diferentes: contribuição do núcleo e do envelope (curva azul), somente a contribuição do núcleo (curva tracejada preta) e somente a contribuição do envelope (curva tracejada rosa). À esquerda para $\eta_c = 10^{13}$ Pa s e à direita para $\eta_c = 10^{16}$ Pa s

7.3 Migração dos outros sete satélites de Saturno

Tendo em vista todas as simplificações e aproximações feitas para estes satélites, concluímos que a dissipação no envelope faz com que os satélites mais externos apresentem uma rápida expansão orbital, enquanto os mais internos migram lentamente. O contrário ocorre quando a migração está associada somente à contribuição do núcleo. A dissipação por maré no núcleo afeta mais significativamente os satélites internos. Alterando a viscosidade do núcleo para valores como, por exemplo, $\eta_c = 10^{13}$ Pa s e $\eta_c = 10^{16}$ Pa s a migração dos satélites externos não se altera de maneira considerável. É possível concluir então, que o *RL* é, de fato, um mecanismo para a expansão rápida de alguns satélites, como é o caso de Titan (Lainey et al., 2020).

Em relação aos cruzamentos observados, o ideal seria inserir as ressonâncias existentes neste sistema, realizar uma integração numérica em alguns bilhões de anos e comparar com os resultados obtidos neste trabalho. O cruzamento obtido entre Hyperion e Titan apresentado na Figura 6.3 ocorre logo após a formação de Saturno. Para o caso de Enceladus e Tethys o cruzamento é observado em torno de 10^9 anos. Considerar que todos os satélites apresentam o mesmo valor de viscosidade e desconsiderar as RMM pode favorecer estes cruzamentos, fornecendo-nos assim, alguns resultados fictícios. Um exemplo de cruzamento orbital é o de Plutão e Netuno. Contudo, como os dois corpos estão em RMM 2:3, a ressonância impede uma possível colisão. Portanto, para um cenário mais realístico a RMM deve ser incluída.

Para analisar a evolução do sistema de satélites de maneira mais realista seria necessário incluir as perturbações mútuas, bem como considerar as camadas que alguns satélites apresentam. Estas mesmas pontuações devem ser empregadas na análise de Mimas. Todavia, a metodologia aplicada neste trabalho apresentou resultados condizentes

com os da literatura ao utilizar os modelos de dissipação para o núcleo e envelope na migração dos satélites (Shoji & Hussmann, 2017; Lainey et al., 2020)

Por fim, concluímos, de maneira geral, que a evolução orbital de Mimas ocorre, em suma, devido à dissipação por maré no núcleo do planeta dependendo da viscosidade atribuída ao mesmo. Além disso, ao considerar que o fator dissipativo Q de Saturno varia temporalmente, seu valor diminui com o tempo ao passo que k_2/Q aumenta.

Diante do que foi apresentado, o trabalho traz possibilidades em relação ao estudo da evolução orbital de Mimas devido às dissipações por maré em cada camada de Saturno e em ambas as camadas simultaneamente. Ao recorrer à literatura percebemos a carência de estudos que analisam a evolução orbital de satélites considerando tanto a dissipação no núcleo quanto a dissipação no envelope. Em Remus et al. (2012) e em Guenel et al. (2014) isso, de fato, foi feito. Entretanto, os autores consideram apenas a reologia de Maxwell em ambas as camadas, além de utilizar o fator dissipativo Q sendo constante. Acreditamos que utilizar um modelo multiparamétrico, como neste trabalho, e analisar possíveis valores para os principais parâmetros trazem possibilidades para estudos futuros. Vimos que alterando os valores da viscosidade do núcleo, nosso resultado principal foi alterado. Como já mencionado, é possível tomar Mimas como um corpo formado por camadas e analisar os parâmetros do satélite. Acrescentar as ressonâncias e integrar numericamente tornariam os resultados deste estudo ainda mais realístico.

Referências Bibliográficas

Allman, G. J. 1849, The Transactions of the Royal Irish Academy, 22, 379. http://www.jstor.org/stable/30079834

Alvarado-Montes, J. A., & García-Carmona, C. 2019, MNRAS, 486, 3963, doi: 10.1093/mnras/stz1081

Beutler, G. 2005, Methods of celestial mechanics. Vol. I: Physical, mathematical, and numerical principles

Brouwer, D., & Clemence, G. M. 1961, Methods of celestial mechanics

Canup, R. M. 2010, Nature, 468, 943, doi: 10.1038/nature09661

Chandrasekhar, S. 1987, Ellipsoidal figures of equilibrium

Charnoz, S., Crida, A., Castillo-Rogez, J. C., et al. 2011, Icarus, 216, 535, doi: 10.1016/j.icarus.2011.09.017

Correia, A. C. M., & Laskar, J. 2003, Journal of Geophysical Research (Planets), 108, 5123, doi: 10.1029/2003JE002059

Ćuk, M., Dones, L., & Nesvorný, D. 2016, ApJ, 820, 97, doi: 10.3847/0004-637X/820/2/97

Danby, J. M. A. 1988, Fundamentals of celestial mechanics

Darwin, G. H. 1880, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series I, 171, 713

Dermott, S. F. 1979, Icarus, 37, 310, doi: 10.1016/0019-1035(79)90137-4

Doodson, A. 1921, Proceedings of the Royal Society, 305

Essen, H. 2004, arXiv e-prints, astro, doi: 10.48550/arXiv.astro-ph/0403328

Ferguson, S. N., Rhoden, A. R., & Kirchoff, M. R. 2022, in LPI Contributions, Vol. 2678, 53rd Lunar and Planetary Science Conference, 2906

Ferraz-Mello, S. 2013, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 116, 109, doi: 10.1007/s10569-013-9482-y

Ferraz-Mello, S. 2015, A&A, 579, A97, doi: 10.1051/0004-6361/201525900

Ferraz-Mello, S., Beaugé, C., Folonier, H. A., & Gomes, G. O. 2020, European Physical Journal Special Topics, 229, 1441, doi: 10.1140/epjst/e2020-900184-5

Ferraz-Mello, S., Folonier, H. A., & Gomes, G. O. 2022, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 134, 25, doi: 10.1007/s10569-022-10082-8

Ferraz-Mello, S., Rodríguez, A., & Hussmann, H. 2008, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 101, 171, doi: 10.1007/s10569-008-9133-x

Folonier, H. A., Boué, G., & Ferraz-Mello, S. 2022, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 134, 1, doi: 10.1007/s10569-021-10053-5

Folonier, H. A., & Ferraz-Mello, S. 2017, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 129, 359, doi: 10.1007/s10569-017-9777-5

Folonier, H. A., Ferraz-Mello, S., & Andrade-Ines, E. 2018, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 130, 78, doi: 10.1007/s10569-018-9872-2

Fuller, J., Luan, J., & Quataert, E. 2016, in AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, Vol. 48, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #48, 401.01

Galilei, G., & Van Helden, A. 2016, Sidereus Nuncius, or The Sidereal Messenger (University of Chicago Press). https://books.google.com.br/books?id=k6xrCwAAQBAJ

Goldreich, P., & Soter, S. 1966, Icarus, 5, 375, doi: 10.1016/0019-1035(66)90051-0

Greenspan, H., Batchelor, C., & Iserles, U. 1968, The Theory of Rotating Fluids, Cambridge Monographs on Mechanics (Cambridge University Press). https://books.google.com.br/books?id=2R47AAAAIAAJ

Guenel, M., Mathis, S., & Remus, F. 2014, in SF2A-2014: Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, ed. J. Ballet, F. Martins, F. Bournaud, R. Monier, & C. Reylé, 237–240. https://arxiv.org/abs/1410.5320

Hansen, C. J., Esposito, L., Stewart, A. I. F., et al. 2006, Science, 311, 1422, doi: 10.1126/science.1121254

Henning, W. G., O'Connell, R. J., & Sasselov, D. D. 2009, ApJ, 707, 1000, doi: 10.1088/0004-637X/707/2/1000

Hussmann, H., Rodríguez, A., Callegari, N., & Shoji, D. 2019, Icarus, 319, 407, doi: 10.1016/j.icarus.2018.09.025

Hut, P. 1981, A&A, 99, 126

Iess, L., Militzer, B., Kaspi, Y., et al. 2019, Science, 364, aat2965, doi: 10.1126/science.aat2965

Johnson, T. 2005, in AGU Fall Meeting Abstracts, Vol. 2005, P21F–03

Kaula, W. M. 1964, Reviews of Geophysics and Space Physics, 2, 661, doi: 10.1029/RG002i004p00661

Kirk, R. L., Archinal, B. A., Tomasko, M. G., et al. 2005, in AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, Vol. 37, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #37, 46.08

Lainey, V., Karatekin, Ö., Desmars, J., et al. 2012, APJ, 752, 14, doi: 10.1088/0004-637X/752/1/14

Lainey, V., Jacobson, R. A., Tajeddine, R., et al. 2017, Icarus, 281, 286, doi: 10.1016/j.icarus.2016.07.014

Lainey, V., Casajus, L. G., Fuller, J., et al. 2020, Nature Astronomy, 4, 1053, doi: 10.1038/s41550-020-1120-5

Landau, L., & Lifshitz, E. 2013, Fluid Mechanics: Volume 6 No. v. 6 (Elsevier Science). https://books.google.com.br/books?id=CeBbAwAAQBAJ

McEwen, A., Turtle, E., Perry, J., et al. 2005, in AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts, Vol. 37, AAS/Division for Planetary Sciences Meeting Abstracts #37, 53.04

Merejolli, R. 2013, Desenvolvimento de um método numérico para simular escoamentos viscoelásticos axissimétricos com superfícies livres : Modelo PTT (Presidente Prudente : [s.n]). https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94321/merejolli_r_me_prud.pdf?sequence=1

Meyer, J., & Wisdom, J. 2008, Icarus, 193, 213, doi: 10.1016/j.icarus.2007.09.008

Mignard, F. 1979, Moon and Planets, 20, 301, doi: 10.1007/BF00907581

Murray, C., & Dermott, S. 1999, Solar System Dynamics (Cambridge University Press). https://books.google.com.br/books?id=NY9iQgAACAAJ

Na, S.-H. 2012, Journal of Korean Astronomical Society, 45, 49, doi: 10.5303/JKAS.2012.45.2.49

Nakajima, A., Ida, S., Kimura, J., & Brasser, R. 2019, Icarus, 317, 570, doi: 10.1016/j.icarus.2018.08.030

Navarro, R. F. 2017, Revista Eletrônica de Materiais e Processos, 12

Neto, J. 2010, Matemática para físicos com aplicações: vetores, tensores e spinores No. v.1 (Editora Livraria da Física). https://books.google.com.br/books?id=EV2fzgEACAAJ

Neveu, M., & Rhoden, A. 2019, in AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting, Vol. 51, AAS/Division of Dynamical Astronomy Meeting, 102.03

Neveu, M., & Rhoden, A. R. 2017, Icarus, 296, 183, doi: 10.1016/j.icarus.2017.06.011

Newton, I. 2017, Principia (São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo)

Noyelles, B., Baillié, K., Charnoz, S., Lainey, V., & Tobie, G. 2019, MNRAS, 486, 2947, doi: 10.1093/mnras/stz445

O'Donoghue, J., Moore, L., Connerney, J., et al. 2019, Icarus, 322, 251, doi: 10.1016/j.icarus.2018.10.027

Ogilvie, G. I. 2013, MNRAS, 429, 613, doi: 10.1093/mnras/sts362

Padovan, S., Spohn, T., Baumeister, P., et al. 2018, A&A, 620, A178, doi: 10.1051/0004-6361/201834181

Perryman, M. 2011, The Exoplanet Handbook

Poisson, E., & Will, C. 2014, Gravity: Newtonian, Post-Newtonian, Relativistic (Cambridge University Press). https://books.google.com.br/books?id=PZ5cAwAAQBAJ

Polycarpe, W., Saillenfest, M., Lainey, V., et al. 2018, A&A, 619, A133, doi: 10.1051/0004-6361/201833930

Porco, C. C., Baker, E., Barbara, J., et al. 2005, Science, 307, 1226, doi: 10.1126/science.1108056

Porco, C. C., Helfenstein, P., Thomas, P. C., et al. 2006, Science, 311, 1393, doi: 10.1126/science.1123013

Remus, F., Mathis, S., Zahn, J. P., & Lainey, V. 2012, A&A, 541, A165, doi: 10.1051/0004-6361/201118595

Remus, F., Mathis, S., Zahn, J.-P., & Lainey, V. 2014, in -, Vol. 293, Formation, Detection, and Characterization of Extrasolar Habitable Planets, ed. N. Haghighipour, 362–368, doi: 10.1017/S1743921313013161

Remus, F., Mathis, S., Zahn, J. P., & Lainey, V. 2015, AAP, 573, A23, doi: 10.1051/0004-6361/201424472

Rhoden, A. R., & Walker, M. E. 2022, Icarus, 376, 114872, doi: 10.1016/j.icarus.2021.114872

Rodríguez, A., & Callegari, N., J. 2021, MNRAS, 506, 5093, doi: 10.1093/mnras/stab1733

Scaife, B. K. P. 1990, Proceedings of the Royal Irish Academy. Section C: Archaeology, Celtic Studies, History, Linguistics, Literature, 90C, 67. http://www.jstor.org/stable/25516063

Schenk, P. 2011, in 42nd Annual Lunar and Planetary Science Conference, Lunar and Planetary Science Conference, 2729

Schmedemann, N., & Neukum, G. 2011, in 42nd Annual Lunar and Planetary Science Conference, Lunar and Planetary Science Conference, 2772

Shoji, D., & Hussmann, H. 2017, AAP, 599, L10, doi: 10.1051/0004-6361/201630230

Singer, K. N., White, O. L., Schmitt, B., et al. 2022, Nature Communications, 13, 1542, doi: 10.1038/s41467-022-29056-3

Sohl, F., Hussmann, H., & Grott, M. 2006, in European Planetary Science Congress 2006, 366

Spahn, F., Schmidt, J., Albers, N., et al. 2006, Science, 311, 1416, doi: 10.1126/science.1121375

Tajeddine, R., Rambaux, N., Lainey, V., et al. 2014, Science, 346, 322, doi: 10.1126/science.1255299

Tokano, T., McKay, C. P., Neubauer, F. M., et al. 2006, in European Planetary Science Congress 2006, 31

Van Helden, A. 2004, in ESA Special Publication, Vol. 1278, Titan - From Discovery to Encounter, ed. K. Fletcher, 11–29

Wagner, R. J., Neukum, G., Stephan, K., et al. 2009, in 40th Annual Lunar and Planetary Science Conference, Lunar and Planetary Science Conference, 2142

Wisdom, J., Dbouk, R., Militzer, B., et al. 2022, Science, 377, 1285, doi: 10.1126/science.abn1234

Witte, M. G., & Savonije, G. J. 1999, A&A, 350, 129. https://arxiv.org/abs/astro-ph/9909073

Witte, M. G., & Savonije, G. J. 2001, A&A, 366, 840, doi: 10.1051/0004-6361:20000245

Wolfram, S. 1999, The MATHEMATICA ® Book, Version 4 (Cambridge University Press). https://books.google.com.br/books?id=Xny77v_QPkEC